ÍNDICE

CAPÍTULO 10

DETERMINANTES

10.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Definición 10.1.1. Sea K un cuerpo, llamamos *determinante* a la función denotada det, tal que $det : M(n,K) \to K$ donde, si $A = (a_{ij}) \in M(n,K)$ se define $det(A)$ por:

$$det(A) = \begin{cases} a_{11} & \text{si } \ n = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} & \text{si } \ n > 1 \end{cases}$$

con M_{in} el determinante de orden $n-1$ que se obtiene de A al eliminar la i-ésima fila y la n-ésima columna.

Definición 10.1.2. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n,K)$; el determinante de orden $n-1$ que se obtiene de A al suprimir la i-ésima fila y la j-ésima columna se llama el menor del elemento a_{ij} y se denota M_{ij}.

Ejemplo 10.1.1. *Encuentre el menor a cada elemento de la primera fila de*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$M_{11} = |4| = 4 \qquad , \qquad M_{12} = |1| = 1.$$

Observación 10.1.1. Si $n = 2$ y $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$ entonces

$$
\begin{aligned}
det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} \\
&= (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{2+2} a_{22} M_{22} \\
&= -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} \\
&= -a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11}.
\end{aligned}
$$

Para determinantes de orden 2 se puede aplicar la siguiente regla,

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}
$$

("diagonal principal menos diagonal secundaria").

Observación 10.1.2. Usando la definición, hemos calculado el determinante desarrollando por menores de acuerdo a la segunda columna (la última columna), sin embargo se puede desarrollar un determinante por menores de cualquier fila o cualquier columna, así,

$$
det(A) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} & \text{para alguna columna } j \text{ fija, } \ j = 1, 2 \\ \sum\limits_{j=1}^{2} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} & \text{para alguna fila } i \text{ fija, } \ i = 1, 2 \end{cases}
$$

Ejemplo 10.1.2. *Considere la matriz* $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, *determine* $det(A)$,

a) usando la definición,

b) usando la regla señalada,

c) por menores de la primera fila.

Solución.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{2} (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} = (-1)^3 2|1| + (-1)^4 4|3| = -2 + 12 = 10.$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \sum\limits_{j=1}^{2} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = (-1)^2 3|4| + (-1)^3 2|1| = 12 - 2 = 10.$

Observación 10.1.3. Si $n = 3$, entonces

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} M_{i3},$$

y también

$$|A| = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} & \text{para alguna columna } j \text{ fija}, \ j = 1, 2, 3 \\ \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} & \text{para alguna fila } i \text{ fija}, \ i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ejemplo 10.1.3. *Calcule el valor de*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

desarrollando por menores de

a) la última columna,

b) la primera fila.

Solución.

a)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} a_{i3} M_{i3} \\ &= (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} + (-1)^{2+3} a_{23} M_{23} + (-1)^{3+3} a_{33} M_{33} \\ &= (-1)^4 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^6 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 + (-1)(-1)(-4) + 1(-2)(3) \\ &= -10. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\ &= (-1)^2 (1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^3 (2) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^4 (0) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1(-6) + (-1)(2)(2) + 0 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Regla de Sarrus

Un determinante de tamaño 3 también se puede desarrollar por la Regla de Sarrus.
Calculemos el determinante del ejemplo anterior usando esta regla.
Copiamos, a continuación del determinante, las dos primeras columnas obteniendo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} \; ;$$

sumamos los triples productos hacia abajo (a los cuales se les conserva el signo) con los opuestos de los triples productos hacia arriba, así, el valor del determinante es $-6-4+0-0-0-0=-10$.

10.2. COFACTORES

Definición 10.2.1. Sea $A=(a_{ij})\in M(n,\mathbb{R})$ y M_{ij} el menor de a_{ij}, llamamos cofactor de a_{ij} al real $(-1)^{i+j}M_{ij}$ y lo denotamos por A_{ij} o $Cof(a_{ij})$.

Observación 10.2.1.

$$|A| = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{para alguna columna } j \text{ fija, } \; j=1,2,3,\ldots,n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} & \text{para alguna fila } i \text{ fija, } \; i=1,2,3,\ldots,n \end{cases}$$

10.3. PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

Proposición 10.3.1. *Sea* $A=(a_{ij})\in M(n,\mathbb{R})$*,* $n\geq 2$*, entonces* $det(A)=det(A^t)$*.*

Demostración. Inducción sobre el orden de A.

i) Si $n=1$ entonces $A=(a_{11})$ y $A^t=(a_{11})$ de donde $det(A)=det(A^t)$.

ii) Supongamos válida la proposición para determinantes de orden menor o igual que $n-1$, debemos demostrar que $det(A^t)=det(A)$, $\forall\, A\in M(n,\mathbb{R})$.

Sea $B=(b_{ij})\in M(n,\mathbb{R})$ tal que $B=A^t$; tenemos: $b_{ij}=a_{ji}$, $\forall\, i,j$ y, por la hipótesis inductiva concluimos $B_{ij}=A_{ji}$.

Desarrollando $det(B)$ por la i-ésima fila obtenemos:

$$det(B)=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}B_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}=det(A).$$

$\square$

Observación 10.3.1. De ahora en adelante, cualquier afirmación sobre filas de un determinante permanecerá valida para columnas.

Teorema 10.3.1. *Sea* $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$*;* $1 \leq k \leq n$*.*

a) Si los elementos de la k*-ésima fila de* A *son ceros, entonces* $det(A) = 0$*.*

b) Si una matriz B *se obtiene de* A *multiplicando los elementos de la* k*-ésima fila por una constante* $c \neq 0$ *entonces,* $det(B) = c\,det(A)$*.*

c) Si cada elemento a_{kj} *de la* k*-ésima fila de* A *es igual a* $a'_{kj} + a''_{kj}$ *entonces* $det(A) = det(A') + det(A'')$ *donde* A' *y* A'' *se deducen de* A *reemplazando* a_{kj} *por* a'_{kj} *y* a''_{kj} *respectivamente.*

Demostración.

a) Si $a_{kj} = 0$ para todo j entonces, desarrollando el determinante por la k-ésima fila obtenemos $det(A) = 0$.

b) Sea $B = (b_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$, los elementos de B son iguales a los de A excepto los de la k-ésima fila, donde $b_{kj} = ca_{kj}$, $\forall\, j$, por lo tanto, desarrollando $det(B)$ por ésta fila obtenemos

$$det(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} ca_{kj}A_{kj} = c\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = c\,det(A).$$

Note que el cofactor de cada uno de los elementos de la k-ésima fila de A es igual al correspondiente cofactor de cada uno de los elementos de la k-ésima de B (precisamente se elimina la fila que las hace diferentes).

c) Los elementos de A' y A'' difieren de los de A sólo en los de la k-ésima fila, por lo tanto, $A'_{kj} = A''_{kj} = A_{kj}\ \forall\, j$, así, desarrollando $det(A)$ por la k-ésima fila obtenemos

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a'_{kj} + a''_{kj})A_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a'_{kj}A_{kj} + \sum_{j=1}^{n} a''_{kj}A_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a'_{kj}A'_{kj} + \sum_{j=1}^{n} a''_{kj}A''_{kj} \\ &= det(A') + det(A''). \end{aligned}$$

□

Teorema 10.3.2. *Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, $n \geq 2$, entonces*

a) $det(B) = -det(A)$ *si B se obtiene de A intercambiando dos filas.*

b) $det(A) = 0$ *si A tiene dos filas proporcionales.*

c) $det(B) = det(A)$ *si B se deduce de A multiplicando la k-ésima fila de A por una constante $c \neq 0$ y sumando a la r-ésima fila de A.*

Demostración. a), b) propuestas.

c) Sea $B = (b_{ij})$ donde la r-ésima fila de A tiene elementos $b_{rj} = ca_{kj} + a_{rj}$.

Usando las proposiciones anteriores obtenemos, $det(B) = det(A) + cdet(A')$ donde A' se obtiene reemplazando en A la r-ésima fila por la k-ésima fila; como en este caso, A' tiene dos filas iguales entonces $det(A') = 0$, por lo tanto, $det(B) = det(A)$.

□

Ejemplo 10.3.1. *Verifique que*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = ab(a-1)(b-1)(b-a).$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} \quad & \underset{f_{31}(-1)}{\overset{f_{21}(-1)}{=}} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a^2-a & b^2-b \\ 0 & a^3-a & b^3-b \end{vmatrix} \\
& = \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a(a-1) & b(b-1) \\ 0 & a(a^2-1) & b(b^2-1) \end{vmatrix} \\
& \overset{def}{=} \quad \begin{vmatrix} a(a-1) & b(b-1) \\ a(a+1)(a-1) & b(b+1)(b-1) \end{vmatrix} \\
& = \quad a(a-1)b(b-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{vmatrix} \\
& = \quad a(a-1)b(b-1)\left[(b+1)-(a+1)\right] \\
& = \quad ab(a-1)(b-1)(b-a).
\end{aligned}$$

Observación 10.3.2. Podemos escalonar el determinante y en este caso el valor del determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal; en el ejemplo anterior y a partir de

$$(*) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a(a-1) & b(b-1) \\ 0 & a(a^2-1) & b(b^2-1) \end{vmatrix}$$

tenemos

$$
\begin{aligned}
(*) &= ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & b-1\\ 0 & a^2-1 & b^2-1\end{vmatrix} \overset{f_{12}(-(a+1))}{=} ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & b-1\\ 0 & 0 & (b^2-1)-(b-1)(a+1)\end{vmatrix}\\
&= ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & b-1\\ 0 & 0 & (b-1)\left[(b+1)-(a+1)\right]\end{vmatrix}\\
&= ab\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & b-1\\ 0 & 0 & (b-1)(b-a)\end{vmatrix}\\
&= ab(a-1)(b-1)(b-a).
\end{aligned}
$$

Estudiaremos ahora el uso de los determinantes para calcular la inversa de una matriz.

10.4. MATRIZ DE COFACTORES Y MATRIZ INVERSA

Definición 10.4.1. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ y A_{ij} el cofactor del elemento a_{ij} entonces, la matriz $(A_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ se llama matriz de los cofactores de A y se denota $Cof(A)$.

Ejemplo 10.4.1. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -2 & 7 & 5\end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$. *Determine* $Cof(A)$.

Solución. Como

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}2 & 0\\ 7 & 5\end{vmatrix} = 10,\\
A_{12} &= (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix}4 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix} = -20,\\
A_{13} &= (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 7\end{vmatrix} = 32,\\
A_{21} &= (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}-3 & 3\\ 7 & 5\end{vmatrix} = 36,\\
A_{22} &= 11 \quad , \quad A_{23} = -1 \quad , \quad A_{31} = -6 \quad , \quad A_{32} = 12 \quad , \quad A_{33} = 14 \quad ,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
Cof(A) = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 32\\ 36 & 11 & -1\\ -6 & 12 & 14\end{pmatrix}
$$

Definición 10.4.2. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, llamamos adjunta de la matriz A, a la matriz denotada $Adj(A)$ tal que $Adj(A)$ es la matriz traspuesta de la matriz de cofactores.

Ejemplo 10.4.2. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

entonces

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} 10 & -20 & 32 \\ 36 & 11 & -1 \\ -6 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

de donde

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 10 & 36 & -6 \\ -20 & 11 & 12 \\ 32 & -1 & 14 \end{pmatrix}$$

Teorema 10.4.1. *Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$, entonces*

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}det(A)$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}det(A)$.

Demostración.

a) Se presentan dos casos

i) Si $j = k$ entonces a) se transforma en $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \delta_{kk}det(A) = det(A)$.

ii) Si $j \neq k$ entonces $\delta_{jk} = 0$ y debemos demostrar que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$.

Sea $B = (b_{ij})$ obtenida de la matriz A reemplazando la columna k por la columna j, entonces B tiene dos columnas iguales (la columna k y la columna j) y además $B_{ij} = A_{ik}$ de donde $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}B_{ij} = det(B) = 0$.

$\square$

Proposición 10.4.1. *Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ entonces $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.*

Proposición 10.4.2. *Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, si la matriz A es no singular entonces $det(A) \neq 0$ y $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.*

Demostración. Como $det(A^{-1}) \cdot det(A) = det(A^{-1} \cdot A) = det(Id_n) = 1$ entonces $det(A) \neq 0$ y además $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$. $\square$

Teorema 10.4.2. *Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $det(A) \neq 0$ entonces la matriz $B = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$ es la matriz inversa de A.*

Demostración. Sea $Adj(A) = (C_{ij})$ tal que $C_{ij} = A_{ji}$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
AB &= (a_{ij})\,\frac{1}{det(A)}\,(C_{ij}) \\
&= \frac{1}{det(A)}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{kj}\right) \\
&= \left(\frac{1}{det(A)}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right) \\
&= \left(\frac{1}{det(A)}\delta_{ij}\,det(A)\right) \\
&= Id_n.
\end{aligned}$$

Análogamente conseguimos $BA = Id_n$, de donde $B = A^{-1}$. □

Observación 10.4.1. Una matriz A es no singular (invertible) si y sólo si $det(A) \neq 0$.

Ejemplo 10.4.3. *Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $\lambda Id_3 - A$ sea singular, donde $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.*

Solución. Como

$$\lambda Id_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -3 \\ -2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

entonces, para que $\lambda Id_3 - A$ sea singular debe ocurrir que

$$\begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

esto ocurre si $\lambda = -3$, $\lambda = 2$.

Ejemplo 10.4.4. *Determine A^{-1}, usando determinantes, si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R}).$$

Solución. Como $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot Adj(A)$ y ya hemos calculado $Adj(A)$ entonces, dado que

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} \overset{f_{21}(-4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -12 \\ -2 & 7 & 5 \end{vmatrix} \overset{f_{31}(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -12 \\ 0 & 1 & 11 \end{vmatrix} = (14)(11) + 12 = 166,$$

concluimos que

$$A^{-1} = \frac{1}{166}\begin{pmatrix} 10 & 36 & -6 \\ -20 & 11 & 12 \\ 32 & -1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Verificación.

$$\begin{aligned} A^{-1}\cdot A &= \frac{1}{166}\begin{pmatrix} 10 & 36 & -6 \\ -20 & 11 & 12 \\ 32 & -1 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 7 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{166}\begin{pmatrix} 166 & 0 & 0 \\ 0 & 166 & 0 \\ 0 & 0 & 166 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.5. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 10.1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Usando la matriz C calcule $3M_{12} + 2M_{31}$.

b) Calcule $det(A)$, $det(B)$, $det(C)$.

c) Calcule $det(B)$ desarrollando por menores de la cuarta fila.

Resp.

a) $3\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -19$, c) 3.

Ejercicio 10.2. Fundamente la veracidad de las siguientes igualdades:

$(a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $b)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$c)\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & x^2 & x^3 \\ z & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $d)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{x}\begin{vmatrix} x^2 & 1 & 1 \\ xy & 1 & -1 \\ xz & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$e)\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad$ $f)\begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Resp.

a) La fila 1 y 2 son proporcionales.

b) La columna 1 y 3 son proporcionales.

c) La columna 2 y 3 son proporcionales.

f) Al sumar la segunda fila a la primera y factorizar por $a+b+c$ quedan dos filas iguales.

Ejercicio 10.3. Si $A \in M(n,\mathbb{R})$ es una matriz triangular (superior o inferior) verifique que su determinante es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Ejercicio 10.4. Usando la propiedad anterior, determine el valor de $det(A)$ si la matriz A es $A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{R})$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \neq j \\ \frac{i+j}{ij} & \text{si } \ i = j \end{cases}$$

Resp. $\frac{2^n}{n!}$.

Ejercicio 10.5. Resuelva las siguientes ecuaciones para x,

a) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ Resp. $x = a$, $x = b$.

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$ $\qquad$ Resp. $x = -\frac{1}{2}$.

c) $\begin{vmatrix} b+x & c+x & a+x \\ c+x & a+x & b+x \\ a+x & b+x & c+x \end{vmatrix} = 0$ $\qquad$ Resp. $x = -\frac{a+b+c}{3}$.

d) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ -2 & x+2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ Resp. $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ Resp. $x = \frac{abc}{ab+bc+ca}$.

f) $\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 3 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ Resp. $x = 0$, $x = 5$.

g) $\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ Resp. $x = 2$, $x = \pm\sqrt{10}$.

Ejercicio 10.6. Calcule, usando propiedades de los determinantes

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ Resp. 60.

b) $\begin{vmatrix} a+3 & -1 & 1 \\ 5 & a-3 & 1 \\ 6 & -6 & a+3 \end{vmatrix}$ Resp. $(a+3)(a+2)(a-2)$.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Resp. -2.

d) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ Resp. 0.

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6+3i & 2i \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5+i \\ 0 & 0 & 1 & -3+3i & 2+3i \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & i \\ 0 & 0 & 0 & i & i+1 \end{vmatrix}$, $i \in \mathbb{C}$. Resp. 3.

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}$, $i \in \mathbb{C}$ Resp. $-24i$.

Ejercicio 10.7. Aplique las propiedades de determinante para probar que

a) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

c) $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1\right),\ a,b,c,d \neq 0.$$

d) $$\begin{vmatrix} ax^2 & \frac{1}{a} & x \\ ay^2 & \frac{1}{a} & y \\ az^2 & \frac{1}{a} & z \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

e) $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+2)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+4)^2 & (a+6)^2 \\ (a+4)^2 & (a+6)^2 & (a+8)^2 \end{vmatrix} = -2^9.$$

f) $$\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} = (c-a)^2(d-b)^2.$$

g) $$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & 1 \end{vmatrix} = ab(b-a)(a-1)(b-1).$$

h) $$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(y-z).$$

Ejercicio 10.8. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcule

$$\begin{vmatrix} 5a+3d & 5b+3e & 5c+3f \\ 6d+5g & 6e+5h & 6f+5i \\ -2g & -2h & -2i \end{vmatrix}.$$

Resp. -180.

Ejercicio 10.9. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $det(\lambda Id_3 - A) = 0$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.10. Verifique las siguientes igualdades

a) $$\begin{vmatrix} -2x & x+y & x+z \\ y+x & -2y & y+z \\ z+x & z+y & -2z \end{vmatrix} = 4(y+z)(z+x)(x+y).$$

b) $$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3.$$

c) $$\begin{vmatrix} y_1+z_1 & z_1+x_1 & x_1+y_1 \\ y_2+z_2 & z_2+x_2 & x_2+y_2 \\ y_3+z_3 & z_3+x_3 & x_3+y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^4)^3.$$

e) $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-2} & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \dots & x^{n-3} & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \dots & x^{n-4} & x^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x^2 & \dots & \dots & \dots & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & \dots & x^{n-1} & 1 \end{vmatrix} = (1-x^n)^{n-1}.$$

f) $$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ x & x & y & z \\ x & x & x & y \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-y)^3.$$

g) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 6-7x & 2x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5+x \\ 0 & 0 & 1 & -3+x & 2+3x \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1+x \end{vmatrix} = 1.$$

h) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = a_1(a_1-a_2)^{n-1}.$$

i) $$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 1 & \dots & \vdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \vdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}.$$

j) $$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)b^2.$$

k) $det(A) = (na+b)b^{n-1}$ si $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} a+b & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

l) $$\begin{vmatrix} -1 & a & a \\ a & -1 & a \\ a & a & -1 \end{vmatrix} = (-1+2a)\left[-(a+1)\right]^2.$$

m) $det(A) = [-1+(n-1)a]\left[-(a+1)\right]^{n-1}$ si $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } i = j \\ a & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ejercicio 10.11. Calcule la matriz inversa de las siguientes matrices, si existe, usando determinantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$