ÍNDICE

CAPÍTULO 11

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

11.1. DEFINICIÓN DE ECUACIÓN LINEAL

Definición 11.1.1. Una ecuación lineal E definida en $\mathbb{R}$, con m indeterminadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$, es toda expresión del tipo

$$E : a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b; \quad a_i, b \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Observación 11.1.1.

a) A la m-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ la llamamos “sistema de coeficientes de E”.

b) Podemos denotar la ecuación por $E : \sum\limits_{i=1}^{m} a_ix_i = b$.

Definición 11.1.2. Sea $E : \sum\limits_{i=1}^{m} a_ix_i = b$ una ecuación lineal en $\mathbb{R}$ con m indeterminadas. Si existe una m-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sum_{i=1}^{m} \alpha_ix_i \equiv b$, decimos que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ es una solución de E.

Ejemplo 11.1.1. *Sea* $E : 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + \sqrt{3}x_5 + 6x_6 = 9$, *entonces la 6-upla* $(1, -1, 1, 1, \sqrt{3}, 0)$ *es una solución de* E, *ya que* $3 \cdot 1 - (-1) + 1 + 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot 0 \equiv 9$.

11.2. DEFINICIÓN DE SISTEMA LINEAL Y CONJUNTO SOLUCIÓN

Definición 11.2.1. Dadas n ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$, cada una con m indeterminadas, un sistema lineal S de tamaño $n \times m$, es toda expresión del tipo

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Observación 11.2.1. Decimos que S es un sistema con n ecuaciones y m incógnitas o más simple, S es un sistema de tamaño $n \times m$ en $\mathbb{R}$.

Definición 11.2.2. Sea S un sistema lineal de tamaño $n \times m$ en $\mathbb{R}$, si existe una m-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ que satisface simultáneamente a las n ecuaciones de S, decimos que α es una solución del sistema S, y llamamos conjunto solución de S al conjunto de todas las soluciones de S; denotamos tal conjunto por $Sol(S)$.

Ejemplo 11.2.1. *Sea S un sistema de tamaño 2×3 en $\mathbb{R}$ tal que*

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

es fácil verificar que los tríos $(2,3,1); (4,2,0); (6,1,-1)$ son solución de S, además

$$Sol(S) = \{(4 - 2\alpha, 2 + \alpha, \alpha) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

La solución $(2,3,1)$ se obtuvo fijando el valor de x_3 en 1 y calculando el correspondiente valor de x_1 y x_2; para determinar $Sol(S)$, transformamos el sistema en un sistema de tamaño 2 por 2, dejando como variable libre a $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$, las incógnitas x_1 y x_2 quedan en función de $x_3 = \alpha$.

Observación 11.2.2. En lo resta del capitulo aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones que tienen una mayor cantidad de incógnitas y ecuaciones, con herramientas más sofisticadas.

11.3. EQUIVALENCIA Y COMPATIBILIDAD

Definición 11.3.1. Dos sistemas S_1 y S_2 son equivalentes si y sólo si $Sol(S_1) = Sol(S_2)$.

Ejemplo 11.3.1. *Los sistemas*

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \qquad y \qquad S_2 : \begin{cases} 3x + 4y = 33 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$$

son equivalentes ya que $Sol(S_1) = Sol(S_2) = \{(7,3)\}$.

Definición 11.3.2. Sea S un sistema lineal de tamaño $n \times m$ en $\mathbb{R}$.

a) S es compatible $\Leftrightarrow Sol(S) \neq \emptyset$.

b) S es incompatible $\Leftrightarrow Sol(S) = \emptyset$.

Si S es compatible y tiene solución única, decimos que el sistema es determinado; en el caso que tenga infinitas soluciones, decimos que el sistema es indeterminado.

Ejemplo 11.3.2.

$$S : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 3 \end{cases} \quad \textit{es incompatible (rectas paralelas)}$$

$$S : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} \quad \textit{es compatible indeterminado (rectas coincidentes)}$$

$$S : \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = -2 \end{cases} \quad \textit{es compatible determinado (rectas que se intersectan)}$$

11.4. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA

Sea

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

un sistema de tamaño $n \times m$ en $\mathbb{R}$, este sistema induce las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M(n, m, \mathbb{R}); \text{ matriz de los coeficientes de } S,$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in M(m, 1, \mathbb{R}); \text{ matriz de las incógnitas,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M(n,1,\mathbb{R}); \text{ matriz de las constantes.}$$

Con estas notaciones, el sistema se puede representar en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

es decir como $AX = B$.

Ejemplo 11.4.1.

$$S : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

se representa por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 11.4.1. Sea $\mathbb{R}^p = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \,/\, a_i \in \mathbb{R}\}$ y $M(p,1,\mathbb{R})$. Es fácil ver que la aplicación

$$\varphi : \mathbb{R}^p \to M(p,1,\mathbb{R}) \text{ tal que } \varphi((a_1, a_2, \dots, a_p)) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$$

es una biyección que preserva la suma y la ponderación por escalar. Debido a ello podemos "identificar" cada p-upla $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ con la matriz columna

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} \in M(p,1,\mathbb{R}).$$

Podemos decir entonces

i) Una solución de un sistema lineal S de tamaño $n \times m$ en $\mathbb{R}$ es una matriz columna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

que satisface la ecuación $AX = B$.

ii) Resolver un sistema lineal S es determinar todas las matrices columna que satisfacen laecuación matricial $AX = B$.

Proposición 11.4.1. *Considere la ecuación matricial $AX = B$ tal que A es una matriz no-singular, entonces, $X = A^{-1}B$ es la única solución del sistema.*

Demostración. Como A es no-singular entonces existe la matriz inversa de A, la cual es única, así entonces $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, de donde $X = A^{-1}B$. $\square$

Ejemplo 11.4.2. *Resuelva el sistema*

$$S : \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Solución. El sistema tiene forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -14 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Note el uso de:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}{ad - bc}, \ ad - bc \neq 0.$$

Ejemplo 11.4.3. *Resuelva el sistema lineal*

$$S : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 7 \\ y + z = 1 \end{cases}.$$

Solución. El sistema admite la forma matricial $AX = B$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Debemos determinar A^{-1}, tenemos

$$
\begin{aligned}
(A|Id_3) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_{21}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{f_{32}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{f_{13}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{f_{12}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

así,

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

de donde

$$
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.
$$

11.5. SISTEMA DE CRAMER

Definición 11.5.1. Un sistema lineal S de tamaño $n \times m$ en $\mathbb{R}$ se llama sistema de Cramer de orden n si

i) El número de incógnitas es igual al número de ecuaciones.

ii) La matriz A de los coeficientes es no-singular.

Teorema 11.5.1. *Sea S un sistema de Cramer de orden n en $\mathbb{R}$, entonces*

i) S es compatible.

ii) S admite solución única.

Demostración. Sea $AX = B$ la representación matricial del sistema S

i) Compatibilidad.

Sea $X_0 = A^{-1}B$, esta matriz existe ya que A^{-1} existe (el sistema es de Cramer) y se puede multiplicar por la matriz B.

X_0 es solución del sistema ya que, $AX_0 = A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right)B = Id_nB = B$.

ii) Unicidad.

Supongamos que X_0, X_0' son dos soluciones del sistema S, entonces se cumple $X_0 = A^{-1}B$, $X_0' = A^{-1}B$, así

$$X_0' = Id_n X_0' = \left(A^{-1}A\right) X_0' = A^{-1}\left(AX_0'\right) = A^{-1}B = X_0.$$

□

11.6. REGLA DE CRAMER

Sea S un sistema de Cramer de orden n en $\mathbb{R}$, entonces el valor de la k-ésima incógnita x_k, $k = 1, 2, \dots, n$ está dado por:

$$x_k = \frac{\Delta_{x_k}}{\Delta},$$

donde $\Delta = det(A)$ es el determinante de la matriz de los coeficientes (determinante principal) y Δ_{x_k} es el determinante que se obtiene de Δ al reemplazar en éste la columna de los coeficientes de x_k por la columna de las constantes.

Demostración. Sea $AX = B$ la representación matricial de un sistema de Cramer de tamaño n.

Sabemos que la solución del sistema es $X = A^{-1}B$, es decir, $X = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A) \cdot B$; esto podemos escribirlo como

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_iA_{i1} \\ \sum_{i=1}^n b_iA_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_iA_{in} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

usando la igualdad de matrices obtenemos

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_iA_{i1} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_iA_{i2} \ , \ \text{ etc.}$$

Por otro lado, sabemos que, desarrollando el determinante de A por menores de la primera columna obtenemos $|A| = \sum_{i=1}^n a_{i1}A_{i1}$.

Si reemplazamos la primera columna de A por la columna de las constantes (es decir por los elementos de la matriz B), pero dejamos fijas las otras columnas de A, entonces, al calcular el valor de este nuevo determinante (llamémoslo Δx_1) por menores de la primera columna obtenemos $\Delta x_1 = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1}$, si al determinante de A lo denotamos por Δ, entonces $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$.

Análogamente, si reemplazamos la segunda columna de A por la columna de las constantes (es decir por los elementos de la matriz B), pero dejamos fijas las otras columnas de A, entonces, al calcular el valor de este nuevo determinante (llamémoslo Δx_2) por menores de la segunda columna obtenemos $\Delta x_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i2}$, de donde $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$ y así sucesivamente. □

Ejemplo 11.6.1. *Usando la Regla de Cramer resuelva el sistema*

$$S : \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - y = 9 \end{cases} .$$

Solución. Como,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -17 \quad , \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -34 \quad , \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -17,$$

entonces

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-34}{-17} = 2 \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1.$$

Ejemplo 11.6.2. *Usando la Regla de Cramer resuelva el sistema*

$$S : \begin{cases} x + y + z + w = -4 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ x + 3y + 6z + 10w = 9 \\ x + 4y + 10z + 20w = 24 \end{cases} .$$

Solución. $x = -4$, $y = -3$, $z = 2$, $w = 1$.

11.7. TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS

11.7.1. Método de Gauss-Jordan

Los métodos anteriormente presentados para resolver sistemas lineales requieren un sistema cuadrado y que la matriz de los coeficientes sea no-singular, además de una considerable cantidad de cálculos.

El método de Gauss-Jordan permite determinar el conjunto solución de sistemas rectangulares de tamaño $n \times m$, con una menor cantidad de operaciones.

Si consideramos el sistema $AX = B$, el método exige construir la matriz ampliada $C = (A|B)$ y en ella, realizar operaciones elementales fila para transformarla en una matriz equivalente que sea escalonada.

El siguiente Teorema regula la condición del conjunto solución.

Teorema 11.7.1. ***(Teorema de Rouche-Frobenius).***
Sea $S : AX = B$ un sistema lineal de tamaño $n \times m$ en el cuerpo K y $C = (A|B)$ la matriz ampliada del sistema, entonces

a) S es compatible si y sólo si $\partial(C) = \partial(A)$.

b) Sea S un sistema compatible, entonces:

i) Si $\partial(A) = m$ entonces S es compatible determinado.

ii) Si $\partial(A) < m$ entonces S es compatible indeterminado.

Observación 11.7.1.

1) Recordemos que el rango de una matriz, técnicamente, es la cantidad de filas no nulas que tiene la matriz escalonada equivalente a la original.

2) Se deduce que el sistema es incompatible (no tiene solución o $Sol(S) = \phi$) si el rango de la matriz ampliada es distinto del rango de la matriz de los coeficientes.

3) El sistema S es compatible determinado (tiene una única solución o $n(Sol(S)) = 1$) si el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de los coeficientes e igual al número de incógnitas.

4) El sistema S es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones o $n(Sol(S)) > 1$) si el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de los coeficientes pero menor que la cantidad de incógnitas).

Ilustremos el Teorema con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 11.7.1. *Resuelva el sistema*

$$S : \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{cases}$$

Solución.

$$C = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{f_{12}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{f_{12}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_{31}(-3)}{\overset{f_{21}(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \underset{f_3(-\frac{1}{4})}{\overset{f_2(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Como $\partial(C) = 3 \neq \partial(A) = 2$ entonces el sistema S es incompatible.

Observe que la última ecuación es $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot w = 1$, ecuación que es imposible de conseguir para todo valor de $x, y, z, w \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 11.7.2. *Solucione el sistema*

$$S : \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{aligned} C = (A|B) \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-2)}{\overset{f_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{array}\right) \overset{f_{41}(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{array}\right) \\ &\underset{f_{42}(-2)}{\overset{f_{32}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{f_3(-\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Como $\partial(C) = \partial(A) = 3 =$ N^o de incógnitas entonces, el sistema es compatible determinado; conviene reducir la matriz ya que en este caso, la solución se muestra inmediatamente, tenemos:

$$\underset{f_{13}(3)}{\overset{f_{23}(-4)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{f_{12}(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El conjunto solución es

$$Sol(S) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo 11.7.3. *Solucione el sistema*

$$S : \begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{aligned} C = (A|B) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-5)}{\overset{f_{21}(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \\ &\overset{f_{23}(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Como $\partial(C) = \partial(A) = 2 < N^\circ$ de incógnitas $= 4$ entonces, el sistema es compatible indeterminado; existen dos variables libres: la variable y y la variable w (aquellas que no inician fila no-nula).

Para facilitar la determinación del conjunto solución conviene reducir la matriz, tenemos:

$$\underset{\sim}{f_{12}(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Usando esta última matriz obtenemos una expresión para las variables x, z en función de la variables libres, así $x = 4 + w - 2y$, $z = 1 + 2w$; finalmente

$$Sol(S) = \{(4 + w - 2y\,,\, y\,,\, 1 + 2w\,,\, w)\,/\, y, w \in \mathbb{R}\}.$$

11.8. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 11.1. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

a) sea incompatible,

b) sea compatible determinado,

c) sea compatible indeterminado.

Solución.

$$\begin{aligned} C = (A|B) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-1)}{\overset{f_{21}(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right) \\ &\underset{\sim}{f_{32}(1-a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4+(a+2)(1-a) & 1+(1-a) \end{array}\right) \end{aligned}$$

Las expresiones de la última fila podemos escribirlas como $-(a+3)(a-2)$ y $2-a$, de donde la matriz es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{array}\right)$$

a) El sistema es incompatible (no tiene solución) si $\partial(C) \neq \partial(A)$, es decir si $-(a+3)(a-2) = 0$ y $(2-a) \neq 0$, esto ocurre si $a = -3$.

b) El sistema es compatible determinado (solución única) si $\partial(C) = \partial(A) = 3$, es decir si $-(a+3)(a-2) \neq 0$, esto ocurre si $a \in \mathbb{R} - \{2, -3\}$.

c) El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) si $\partial(C) = \partial(A) < 3$, es decir si $-(a+3)(a-2) = 0$ y $(2-a) = 0$, esto ocurre si $a = 2$.

Ejercicio 11.2. Considere el sistema real

$$S : \begin{cases} x + 2y = a + b - 1 \\ 5x - 13y = 5a - 2b \\ 3x - 7y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

determine a y b para que el sistema tenga solución única.

Solución. La matriz ampliada del sistema es

$$C = (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+b-1 \\ 5 & -13 & 5a-2b \\ 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+b-1 \\ 0 & -23 & -7b+5 \\ 0 & -13 & -2a-3b+3 \\ 0 & -1 & -a+1 \end{array}\right)$$

(las operaciones usadas fueron: $f_{21}(-5)$, $f_{31}(-3)$, $f_{41}(-1)$)

$$\underset{\sim}{f_{24}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+b-1 \\ 0 & -1 & -a+1 \\ 0 & -13 & -2a-3b+3 \\ 0 & -23 & -7b+5 \end{array}\right) \underset{f_{42}(-23)}{\overset{f_{32}(-13)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+b-1 \\ 0 & -1 & -a+1 \\ 0 & 0 & 11a-3b-10 \\ 0 & 0 & 23a-7b-18 \end{array}\right) \underset{\sim}{f_2(-1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a+b-1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 11a-3b-10 \\ 0 & 0 & 23a-7b-18 \end{array}\right)$$

Como deseamos que el sistema tenga solución única entonces el rango de la matriz ampliada debe ser igual al rango de la matriz de los coeficientes e igual a 2, en este caso se debe cumplir que: $11a - 3b - 10 = 0 \wedge 23a - 7b - 18 = 0$. Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} 11a - 3b - 10 = 0 \\ 23a - 7b - 18 = 0 \end{cases}$$

obtenemos: $a = 2$, $b = 4$.

Ejercicio 11.3. Considere el sistema lineal

$$S : \begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -6 \\ 2x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$$

a) Determine $Sol(S)$ usando el Teorema de Rouche-Frobenius.

b) Determine $Sol(S)$ usando el método matricial.

c) Determine x usando la Regla de Cramer.

Solución.

a) La matriz ampliada asociada al sistema es

$$C = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

Debemos escalonar y reducir la matriz ampliada, tenemos

$$\begin{aligned} C = (A|B) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & 5 & 2 & 10 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-2)}{\overset{f_{21}(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -4 & 6 \end{array}\right) \\ &\sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Como $\partial(C) = \partial(A) = 3 = N^\circ$ de incognitas, entonces el sistema es compatible determinado y concluimos: $x = 38$, $y = -14$, $z = 2$ ó $Sol(S) = \{(38, -14, 2)\}$.

b) La forma matricial del sistema es $AX = B$; dado que la matriz de los coeficientes A es invertible, entonces la solución es $X = A^{-1}B$. Como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{9}{4} & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{9}{4} & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Por la regla de Cramer tenemos $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$. Como

$$\Delta = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

y

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & -1 \\ 10 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -152$$

entonces $x = \frac{-152}{-4} = 38$.

Ejercicio 11.4. Sea

$$S : \begin{cases} x + 2y - z + w = 3 \\ x + y + 2z + 3w = 7 \end{cases}$$

un sistema lineal en $\mathbb{R}$.

a) Determine el conjunto solución $Sol(S)$.

b) Muestre dos soluciones particulares del sistema.

Solución.

a) La matriz ampliada del sistema es

$$C = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \overset{f_{21}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

con esto ya sabemos que el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones), sin embargo, para mayor comodidad en la declaración del conjunto solución, es conveniente "reducir" la matriz ampliada; tenemos a continuación

$$\overset{f_{12}(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{f_{2}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

Existen dos variables libres, z , w. De la segunda fila concluimos que: $y = -4 + 3z + 2w$, y de la primera fila la conclusión es $x = 11 - 5z - 5w$.

Así, $Sol(S) = \{(11 - 5z - 5w\,,\, -4 + 3z + 2w\,,\, z\,,\, w) \,/\, z, w \in \mathbb{R}\}$.

b) Si $z = 1$, $w = 1$ entonces $x = 1$, $y = 1$.

Si $z = 0$, $w = 0$ entonces $x = 11$, $y = -4$.

11.9. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 11.1. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$S : \begin{cases} 3x + 6y - 3z = 6 \\ -x - y + 5z = 4 \\ 2x + 4y - 4z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

a) Demuestre que el sistema es compatible.

b) El sistema S, ¿es compatible determinado?. Justifique.

c) Determine el conjunto solución de S.

Ejercicio 11.2. Los siguientes sistemas homogéneos ¿tienen solución distinta de la trivial?. Justifique.

$$a)\ S: \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 6z = 0 \\ 3x - 11y + 12z = 0 \end{cases} \qquad b)\ S: \begin{cases} 2x - 4y + 7z - 5w = 0 \\ 9x + 3y + 2z + w = 0 \\ 5x + 2y - 3z + 3w = 0 \\ 6x - 5y + 4z - 2w = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 11.3. Si un sistema lineal S de tamaño $n \times m$ en los números reales tiene más de una solución demuestre que el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, dado

$$S: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$$

con $i = 1, 2, \ldots, m$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ dos raíces distintas de S, demuestre que $\alpha + k(\alpha - \beta)$, $k \in \mathbb{R}$, es también solución de S.

Ejercicio 11.4. Considere el sistema

$$S: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer, determine el valor de las incógnitas y calcule $\left[(x+2)^{y+3}\right]^z$.

Resp. $x = y = z = 1$; 81.

Ejercicio 11.5. Aplicando Teorema de Rouche-Frobenius, resuelva:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$ Resp. $Sol = \{(4, -2, 3)\}$.

b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$ Resp. $Sol = \emptyset$, Sistema incompatible.

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ Resp. $Sol = \left\{\left(-\frac{4}{5}x_3, \frac{9}{5}x_3, x_3\right) / x_3 \in \mathbb{R}\right\}$.

d) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2xy + z = 0 \end{cases}$ Resp. $Sol = \{(-z, z, z,) / z \in \mathbb{R}\}$.

e) $\begin{cases} 2x + 6y - 4z + 2w = 4 \\ x - z + w = 5 \\ -3x + 2y - 2z = -2 \end{cases}$ Resp. $Sol = \left\{ (5 + z - w, -1 + \frac{1}{3}z, z, w) \,/\, z, w \in \mathbb{R} \right\}.$

f) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5x - 2y - 9z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$ Resp. $Sol = \{ (z, -2z, z) \,/\, z \in \mathbb{R} \}.$

g) $\begin{cases} w + x + 3y - z = 2 \\ 2w + x + 5y - 2z = 0 \\ 2w - x + 3y - 2z = -8 \\ 3w + 2x + 8y - 3z = 2 \\ w + 2y - z = -2 \end{cases}$

Ejercicio 11.6. Para cada uno de los sistemas, aplique la matriz inversa para determinar la solución del sistema lineal planteado

a) $\begin{cases} 6x + 5y = 2 \\ x + y = -3 \end{cases}$ Resp. $Sol(S) = \{ (17, -20) \}.$

b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ Resp. $Sol(S) = \left\{ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}.$

Además, resuélvalos usando la Regla de Cramer.

Ejercicio 11.7. Resuelva los siguientes sistemas

a) $S: \begin{cases} 959 = 10x + 9,4y \\ 924,8 = 9,4x + 9,28y \end{cases}$ Resp. $x = 46,48648\,,\ \ y = 52,56757.$

b) $S: \begin{cases} 637{,}000 = 8x + 25y + 16z \\ 2{,}031{,}100 = 25x + 87y + 55z \\ 1{,}297{,}700 = 16x + 55y + 36z \end{cases}$ Resp. $x = 65{,}191,7,\ y = 4{,}133,3, z = 758,3.$

Ejercicio 11.8. Determine el(los) valor(es) de k en $\mathbb{R}$ para que el sistema tenga

i) solución única,

ii) ninguna solución,

iii) infinitas soluciones.

$a)\ S : \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$ $\qquad$ $b)\ S : \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

$c)\ S : \begin{cases} x - y + z = 7 \\ -x + y + z = 3 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + ky - 4z = k \end{cases}$ $\qquad$ $d)\ S : \begin{cases} (k+1)x + y + z = k^2 + 3k \\ x + (k+1)y + z = k^3 + 3k^2 \\ x + y + (k+1)z = k^4 + 3k^3 \end{cases}$

$e)\ S : \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = k - 2 \end{cases}$ $\qquad$ $f)\ S : \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$

Resp.

a) Si $k = 4$ el sistema es incompatible.
   Si $k \neq 4$ el sistema es compatible determinado.
   El sistema nunca es compatible determinado.

b) Si $k = 3$ el sistema es compatible indeterminado.
   Si $k \neq 3$ el sistema es compatible determinado.
   El sistema nunca siempre tiene solución.

c) Si $k = 12$ el sistema es compatible determinado.
   Si $k \neq 12$ el sistema es incompatible.
   No existe $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema sea compatible indeterminado.

Ejercicio 11.9. El sistema

$$S : \begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

tiene solución única. Demuestre que $abc \neq 0$ y determine el conjunto solución.

Resp. $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}, \frac{c^2-b^2+a^2}{2ac}, \frac{a^2-c^2+b^2}{2ab} \right) \right\}$.

Ejercicio 11.10. Discuta el sistema lineal

$$S : \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + ay + az = 5 \\ 4x + ay = 5 \end{cases}$$

Resp.

Si $a = 0$ el sistema es incompatible.

Si $a = 5$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $a \in \mathbb{R} - \{0; 5\}$ el sistema es compatible determinado.

Ejercicio 11.11. ¿Qué condiciones deben cumplir los números reales a, b, c para que el sistema

$$S : \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y - z = b \\ x - 2z = c \end{cases}$$

tenga solución?.

Resp. $c + a - b = 0$.

Ejercicio 11.12. Determine los reales k, a, b, c, d de modo que los sistemas

$$S : \begin{cases} 2x - 3y + kz = 1 \\ x - y + 4z = -4 \\ -5x + 8y + (4 - 3k)z = k - 23 \end{cases} \quad , \quad S_1 : \begin{cases} -3x - 4y + az = c \\ 4x + 4y + bz = d \end{cases}$$

sean equivalentes.

Ejercicio 11.13. Resuelva el sistema según sean los valores del número real k

$$S : \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + ky + 6z = 6 \\ -x + 3y + (k - 3)z = 0 \end{cases}$$

Resp.

a) Si $k \in \mathbb{R} - \{0, -4\}$ el sistema tiene solución única,

$$Sol(S) = \left\{ \left(\tfrac{k+9}{k+4}, \tfrac{4}{k+4}, \tfrac{1}{k+4} \right) \right\}.$$

b) Si $k = 0$ el sistema tiene infinitas soluciones,

$$Sol(S) = \{(3 - 3z, 1, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}.$$

c) Si $k = -4$ el sistema tiene $Sol(S) = \emptyset$.