ÍNDICE

CAPÍTULO 14
ECUACIONES DIFERENCIALES

14.1. DEFINICIONES

Una ecuación diferencial es aquella donde interviene una variable dependiente y sus derivadas con respecto de una o más variables independientes.

Estudiaremos algunas de ellas, en particular, aquella donde existe una única variable independiente y, en ese caso la ecuación diferencial se llama *ecuación diferencial ordinaria.*

Si $y = f(x)$ entonces la forma general de la ecuación diferencial ordinaria es del tipo

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

14.2. GENERACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Si $y = f(x)$ es una función dada, entonces sabemos que su derivada $\frac{dy}{dx}$ puede interpretarse como el *ritmo de cambio de la variable* y *con respecto del cambio de la variable* x.

En cualquier proceso natural, las variables involucradas y sus ritmos de variación están relacionadas entre sí por medio de los principios básicos que gobiernan dicho procesos. Al expresar la conexión en símbolos matemáticos el resultado es, con frecuencia, una ecuación diferencial.

El siguiente ejemplo ilustra estos comentarios.

Ejemplo 14.2.1. *De acuerdo a la "2^{da} ley de Newton", la aceleración "a" que experimenta un cuerpo de masa "m" es proporcional a la fuerza total "F" que actúa sobre el cuerpo con $\frac{1}{m}$ como constante de proporcionalidad, así entonces, $a = \frac{1}{m}F$, es decir, $ma = F$.*

Supongamos que un cuerpo de masa "m" cae sólo bajo la influencia de la gravitación, en tal caso la única fuerza que actúa sobre él es mg, donde g denota la aceleración de gravedad ($g \approx 980cm.$ por cada segundo).

Si "y" es la altura medida hacia abajo desde una posición prefijada, entonces su velocidad $v = \frac{dy}{dt}$ *es el ritmo de cambio de su posición y su aceleración* $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$ *es el ritmo de cambio de la velocidad. Con esta notación, la ecuación* $mg = F$ *se convierte en* $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg$*, es decir,* $\frac{d^2y}{dt^2} = g$.

Si alteramos la situación, admitiendo que el aire ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad, la fuerza total F *es* $mg - k\frac{dy}{dt}$ *y la ecuación planteada es ahora* $m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}$.

Definición 14.2.1. Se llama orden de una ecuación diferencial ordinaria al orden de derivación más alto que aparezca en la ecuación $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Se llama grado de una ecuación diferencial ordinaria al exponente que afecta a la derivada de más alto orden.

Ejemplo 14.2.2.

1. $\frac{dy}{dx} = x + 5$ *es de primer orden, primer grado.*
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 2 = 0$ *es de segundo orden, primer grado.*
3. $(y'')^2 - (y')^3 + 3y - x^2 = 0$ *es de segundo orden, tercer grado.*

14.3. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Definición 14.3.1. Toda función $y = y(x)$ que transforma la ecuación diferencial en una identidad se denomina solución o integral de la ecuación diferencial.

Ejemplo 14.3.1. *Considere la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

pruebe que las funciones $y = \sin(x)$*,* $y = \cos(x)$*, y en general* $y = A\sin(x) + B\cos(x)$*,* A, B *constantes, son solución de la ecuación planteada.*

Solución.

Si $y = A\sin(x) + B\cos(x)$ entonces $\frac{dy}{dx} = A\cos(x) - B\sin(x)$, de donde, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es tal que $\frac{d^2y}{dx^2} = A\sin(x) - B\cos(x)$, así, reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = -A\sin(x) - B\cos(x) + A\sin(x) + B\cos(x) \equiv 0.$$

Observación 14.3.1. Una ecuación diferencial de primer orden tiene la forma

$$F(x, y, y') = 0,$$

si esta ecuación es soluble para la derivada entonces $y' = f(x, y)$, se llama "forma normal de la ecuación diferencial".

Definición 14.3.2. Llamamos solución general de una ecuación diferencial normal de primer orden a la función $y = S(x, C)$ con $C = C^{te}$ tal que

a) satisface la ecuación diferencial para todo valor de C

b) cualquiera que sea la condición inicial $y = y_0$ para $x = x_0$ puede encontrarse un valor $C = C_0$ tal que $y = S(x, C_0)$.

Definición 14.3.3. Toda función $y = S(x, C_0)$ deducida de la solución general $y = S(x, C)$ se llama solución particular de la ecuación.

Ejemplo 14.3.2. *La ecuación diferencial de primer orden* $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ *tiene por solución general la familia de funciones* $y = \frac{C}{x}$ *ya que, derivando la función obtenemos* $\frac{dy}{dx} = -\frac{C}{x^2}$*; como* $C = yx$ *entonces,* $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx}{x^2} = -\frac{y}{x}$.

La solución particular que satisface la condición inicial $y_0 = 1$ *para* $x_0 = 2$ *nos indica que se cumple* $1 = \frac{C}{2}$*, es decir* $C = 2$*, de donde, la solución particular es* $y = \frac{2}{x}$ *(aquella hipérbola equilátera que pasa por el punto* $(2, 1)$*).*

Observación 14.3.2.

1. Con frecuencia aparecen soluciones de ecuaciones diferenciales definidas implícitamente y a veces es difícil o imposible expresar explícitamente la variable dependiente en términos de la variable independiente.

   Así por ejemplo $xy = \ln(y)+C$, C una constante, es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$, ya que derivando implícitamente la expresión $xy = \ln(y) + C$ tenemos, $y + x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, al despejar $\frac{dy}{dx}$ obtenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\frac{1}{y}-x}$ es decir, obtenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-xy}$, en la cual no podemos expresar la derivada sólo en función de la variable x.

2. Si la ecuación diferencial tiene la forma normal $y' = f(x, y)$ y si $f(x, y) = g(x)$ entonces la ecuación diferencial queda $\frac{dy}{dx} = g(x)$, la cual se puede solucionar, generalmente, escribiendo $dy = g(x)dx$, de donde $y = \int g(x)dx + C$, esta integral se puede resolver, generalmente, con los métodos del cálculo.

   Por ejemplo, la ecuación diferencial $y' = e^{3x} + x$ tiene solución general

   $$y = \int (e^{3x} + x)dx + C = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

   Sin embargo, recordemos que existen otras integrales como $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin(x)}{x}dx$ que no son expresables mediante un número finito de funciones elementales.

14.4. ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES Y SEPARADAS

Si en la ecuación diferencial normal $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, el segundo lado de ella se factoriza en un producto de funciones de x por funciones de y entonces la ecuación es

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y);$$

si $f_2(y) \neq 0$ entonces podemos anotarla como $\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx$, y por integración obtenemos

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx + C.$$

Esta ecuación es de variables separables.

Ejemplo 14.4.1. *Resuelva la ecuación* $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

Solución.
Notamos inmediatamente que es una ecuación de variables separables, entonces

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

integrando obtenemos $\ln(y) = -\ln(x) + C$. En este caso es conveniente escribir $\ln(y) = -\ln(x) + \ln(K)$ de donde $\ln(y) = \ln\frac{K}{x}$, así entonces la integral o solución general de la ecuación es $y = \frac{K}{x}$.

Observación 14.4.1.

1. La ecuación diferencial

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

se llama ecuación de variables separadas y su integral general es

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Por ejemplo, al considerar la ecuación diferencial $xdx + ydy = 0$ tenemos $\int xdx + \int ydy = C$ de donde la solución general es $x^2 + y^2 = K^2$ con $K^2 = 2C$.

2. Una ecuación del tipo

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

se puede reducir a una ecuación de variables separadas dividiendo por $N_1(y)M_2(x)$; la ecuación diferencial queda

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Ejemplo 14.4.2. *Resuelva la ecuación* $(t^2 - xt^2)dx + (x^2 + tx^2)dt = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned}
(t^2 - xt^2)dx + (x^2 + tx^2)dt = 0 \quad &\Rightarrow \quad t^2(1-x)dx + x^2(1+t)dt = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1-x}{x^2}dx + \frac{1+t}{t^2}dt = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1-x}{x^2}dx + \int \frac{1+t}{t^2}dt = C \\
&\Rightarrow \quad \int \left(x^{-1} - \frac{1}{x}\right) dx + \int \left(t^{-2} + \frac{1}{t}\right) dt = C \\
&\Rightarrow \quad -\frac{1}{x} - \ln(x) - \frac{1}{t} + \ln(t) = C \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \ln(x) + \frac{1}{t} - \ln(t) = K \\
&\Rightarrow \quad \frac{x+t}{xt} + \ln\left(\frac{x}{t}\right) = K.
\end{aligned}$$

14.5. ECUACIONES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN

Recordemos que la función $f(x, y)$ es homogénea de grado n con respecto de las variables x e y si para todo $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Ejemplo 14.5.1.

1. *La función* $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ *es homogénea de grado 1 ya que*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 - (\lambda y)^3} = \sqrt[3]{\lambda^3 x^3 - \lambda^3 y^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 - y^3} = \lambda f(x, y).$$

2. *La función* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *es homogénea de grado 2 ya que*

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2(x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

3. *La función* $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ *es homogénea de grado 0 ya que*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = f(x, y).$$

Definición 14.5.1. La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

se llama homogénea respecto de x e y si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado 0 con respecto de x e y.

14.5.1. Solución de la Ecuación Homogénea

Como $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, haciendo $\lambda = \frac{1}{x}$ obtenemos $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$, con esto, la ecuación diferencial queda

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{14.1}$$

Consideremos el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$, o equivalentemente, $y = ux$, entonces $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, reemplazando en (14.1) obtenemos la ecuación diferencial $u + x\frac{du}{dx} = f(1,u)$ que es de variables separables, tenemos

$$\begin{aligned} u + x\frac{du}{dx} = f(1,u) \quad &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u \\ &\Rightarrow \quad \frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}; \end{aligned}$$

al integrar y sustituir la variable u por $\frac{y}{x}$ conseguimos la solución general.

Ejemplo 14.5.2. *Resuelva la ecuación diferencial* $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Solución.

Claramente la ecuación es homogénea, al reconocerla como tal hacemos el cambio de variable $y = ux$, con lo cual obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx};$$

además, usando sintéticamente el desarrollo dado anteriormente, la función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ queda $f(1,u) = \frac{u}{1-u^2}$ de donde, la ecuación original es ahora $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2}$.

Otra forma, quizás más directa, de obtener la ecuación $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2}$ es proceder como sigue, ya sabemos que $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, por otro lado, al reemplazar y por ux en $\frac{xy}{x^2-y^2}$ obtenemos

$$\frac{x(ux)}{x^2 - (ux)^2} = \frac{ux^2}{x^2 - u^2x^2} = \frac{u}{1-u^2},$$

así, $u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2}$.

Resolvamos la ecuación deducida,

$$\begin{aligned} u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} \quad &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2} - u \\ &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1-u^2}{u^3}du = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \left(u^{-3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2u^2} - \ln(u) = \ln(x) + C_1 \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln(x) + \ln(u) + \ln(C) \\ &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln(Cux). \end{aligned}$$

Al reemplazar u por $\frac{y}{x}$ en la última ecuación conseguimos $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln(Cy)$, de donde, al despejar la variable x, la solución general se puede expresar por $x = y\sqrt{-2\ln(Cy)}$.

Reemplazando u por $\frac{y}{x}$ obtenemos $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln(Cy)$ y finalmente $x = y\sqrt{-2\ln(Cy)}$ es la solución general de la ecuación.

Observación 14.5.1. La ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

será una ecuación homogénea si $M(x,y)$, $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado ya que en este caso el cuociente es de grado cero.

Ejemplo 14.5.3. *Resuelva la ecuación* $(y-x)dx + (y+x)dy = 0$.

Solución.

$$\begin{aligned} (y-x)dx + (y+x)dy = 0 \quad &\Rightarrow \quad (y+x)dy = (x-y)dx \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}, \end{aligned}$$

con el cambio de variable $y = ux$ tenemos $\frac{x-y}{x+y} = \frac{x-ux}{x+ux} = \frac{1-u}{1+u}$, por otro lado, de $y = ux$ conseguimos $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ de donde la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ queda $u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u}$.

Para esta última ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} u + x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} \quad &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1-u}{1+u} - u \\ &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{(1-u) - u(1+u)}{1+u} \\ &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{-u^2 - 2u + 1}{u+1} \\ &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 2u - 1}{u+1} \\ &\Rightarrow \quad \frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(u^2+2u-1) = -\ln(x) + C_1 \\ &\Rightarrow \quad \ln(u^2+2u-1)^{\frac{1}{2}} = -\ln(x) + \ln(C) \\ &\Rightarrow \quad \ln(u^2+2u-1)^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\frac{C}{x}\right) \\ &\Rightarrow \quad (u^2+2u-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Al volver a la variable original, reemplazando $u = \frac{y}{x}$ obtenemos $\sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1} = \frac{C}{x}$, es decir, $\frac{\sqrt{y^2+2yx-x}}{x} = \frac{C}{x}$, al simplificar y elevar al cuadrado tenemos la solución general $y^2 + 2xy - x = K$, donde $K = C^2$.

14.6. ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

En la sección anterior vimos como resolver una ecuación diferencial separable, integrando, después de multiplicar cada término por un factor adecuado.

Por ejemplo, para resolver $\frac{dy}{dx} = 2xy$ multiplicamos por $\frac{1}{y}$, y obtenemos $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$, es decir, $d(\ln(y)) = d(x^2)$, al integrar obtenemos $\ln(y) = x^2 + C$.

A la función $\rho(y) = \frac{1}{y}$ la llamamos factor integrante de la ecuación. Mediante un factor integrante adecuado existe una técnica estandarizada para solucionar la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

El factor integrante es $\rho(x) = e^{\int P(x)dx}$; tenemos,

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

El primer lado de la ecuación es la derivada de $ye^{\int p(x)dx}$, de donde, integrando obtenemos

$$ye^{\int p(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

y entonces la solución general es

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right].$$

Observación 14.6.1. No es recomendable memorizar esta última fórmula, en su reemplazo debemos realizar los siguientes pasos,

1. Reconocer la ecuación como una ecuación lineal.
2. Calcular el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$.
3. Multiplicar la ecuación por el factor integrante.
4. Reconocer el primer lado de la ecuación como la diferencial de un producto.
5. Integrar.

Ejemplo 14.6.1. *Resuelva la ecuación* $\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}$.

Solución.

La ecuación planteada es lineal tanto en la variable como en su derivada; tenemos

$$P(x) = -3\ , \quad Q(x) = e^{2x}$$

entonces el factor integrante es

$$\rho(x) = e^{\int -3dx} = e^{-3x}.$$

Al multiplicar la ecuación original por e^{-3x} obtenemos $e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3ye^{-3x} = e^{-x}$, ésta última ecuación la escribimos como $\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = e^{-x}$ de donde $d(e^{-3x}y) = e^{-x}dx$.

Integrando tenemos $e^{-3x}y = \int e^{-x}dx + C$, es decir, $e^{-3x}y = -e^{-x} + C$, entonces la solución general de la ecuación es $y = e^{3x}(-e^{-x} + C) = Ce^{3x} - e^{2x}$.

Ejemplo 14.6.2. *Resuelva la ecuación* $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+3xy=6x$.

Solución.

De la ecuación original deducimos $\frac{dy}{dx}+\frac{3x}{x^2+1}y=\frac{6x}{x^2+1}$, la cual es lineal con

$$P(x)=\frac{3x}{x^2+1}\ ,\quad Q(x)=\frac{6x}{x^2+1}.$$

El factor integrante es

$$\rho(x)=e^{\int\frac{3x}{x^2+1}dx}=\exp\left(\int\frac{3x}{x^2+1}dx\right)=\exp\left(\frac{3}{2}\ln(x^2+1)\right)=(x^2+1)^{\frac{3}{2}},$$

de donde, la ecuación queda

$$(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{dy}{dx}+3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}y=6x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando obtenemos

$$(x^2+1)^{\frac{3}{2}}y=\int 6x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx+C=2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C,$$

de donde la solución general es $y=2+C(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$.

Ejemplo 14.6.3. *Resuelva* $\frac{dy}{dx}-a\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}$, $a\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Solución.

Notamos que la ecuación planteada es lineal, entonces el factor integrante es

$$\rho(x)=e^{\int p(x)dx}$$

donde $p(x)=-\frac{a}{x}$; tenemos,

$$\rho(x)=e^{\int-\frac{a}{x}dx}=e^{-a\ln(x)}=e^{\ln(x)^{-a}}=x^{-a}.$$

Al multiplicar la ecuación diferencial original por este factor integrante obtenemos

$$x^{-a}\frac{dy}{dx}-a\frac{y}{x^{a+1}}=\frac{x+1}{x^{a+1}},$$

es inmediato reconocer el lado izquierdo de la ecuación como $\frac{d}{dx}(yx^{-a})$, de donde $d(yx^{-a})=\frac{x+1}{x^{a+1}}dx$. Al integrar tenemos

$$yx^{-a}=\int\frac{x+1}{x^{a+1}}dx+C,$$

es decir,

$$yx^{-a}=\int(x^{-a}+x^{-a-1})dx+C,$$

así,

$$yx^{-a}=\frac{x^{-a+1}}{-a+1}+\frac{x^{-a}}{-a}+C;$$

al despejar la variable y obtenemos $y=\frac{x}{1-a}-\frac{1}{a}+Cx^a$ que es la solución general de la ecuación diferencial planteada.

Ejemplo 14.6.4. *Considere la ecuación* $xe^{2y}\frac{dy}{dx}+e^{2y}=\frac{\ln(x)}{x}$. *Resuelva con la sustitución* $u=e^{2y}$.

Solución.
Si $u=e^{2y}$ entonces derivando con respecto de x tenemos

$$\frac{du}{dx}=2e^{2y}\frac{dy}{dx}$$

de donde,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2e^{2y}}\frac{du}{dx},$$

reemplazando en la ecuación original tenemos,

$$\frac{1}{2e^{2y}}x\frac{du}{dx}+u=\frac{\ln(x)}{x},$$

la ecuación que resulta es

$$\frac{x}{2}\frac{du}{dx}+u=\frac{\ln(x)}{x}$$

la cual es lineal en u.

En definitiva, la ecuación es

$$\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=\frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

Aquí el factor integrante es x^2, de donde $ux^2=\int 2\ln(x)dx+C$, así, integrando obtenemos $ux^2=2(x\ln(x)-1)+C$. Al reemplazar u por e^{2y} tenemos la solución general $x^2e^{2y}=2x\ln(x)-2x+C$.

14.6.1. Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

donde $P(x)$, $Q(x)$ son funciones continuas, $n\neq 0$, $n\neq 1$ se llama ecuación de Bernoulli.
Esta ecuación, escrita como

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x)$$

se reduce a una ecuación lineal con el cambio de variable $z=y^{-n+1}$.

En efecto, derivando con respecto de x obtenemos

$$\frac{dz}{dx}=(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

es decir

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^n}{(-n+1)}\frac{dz}{dx}.$$

Reemplazando en $y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$ obtenemos

$$\frac{1}{(-n+1)}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

es decir,

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x)$$

la cual es una ecuación lineal en z; después de resolverla reemplazamos z por y^{-n+1}.

Ejemplo 14.6.5. *Resuelva la ecuación* $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$.

Solución.

La ecuación planteada es de Bernoulli y la escribimos

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = x^3. \qquad (*)$$

Sea $z = y^{-2}$ entonces

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y^{-3}}\frac{dz}{dx}.$$

Si reemplazamos $\frac{dy}{dx}$, y^{-2} en $(*)$ conseguimos la ecuación

$$y^{-3}\frac{1}{-2y^{-3}}\frac{dz}{dx} + xz = x^3$$

que, al multiplicar por -2 entrega la ecuación $\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$ que es lineal en z.

Aquí el factor integrante es $\rho(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$, entonces la ecuación es ahora

$$e^{-x^2}\frac{dz}{dx} - 2xze^{-x^2} = -2x^3e^{-x^2}$$

de donde $ze^{-x^2} = \int -2x^3e^{-x^2}dx + C$.

En la última integral, que la resolvemos por integración por partes, consideramos la integral escrita como $\int x^2(-2xe^{-x^2})dx$ y, al considerar $u = x^2$, $dv = -2xe^{-x^2}$ la integral es $x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$, así, $ze^{-x^2} = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$, entonces $z = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$; al reemplazar z tenemos finalmente $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}$.

14.6.2. Ecuación de Ricatti

Esta ecuación es de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$, $P(x) \neq 0$; no se puede resolver por métodos elementales, sin embargo, si conocemos una solución particular $y_1(x)$ podemos resolverla, transformándola en una ecuación diferencial lineal con la transformación $y = y_1 + \frac{1}{u}$.

Si $y = y_1 + \frac{1}{u}$ entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx},$$

reemplazando en la ecuación original obtenemos

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} + P(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{u}\right) + R(x) = 0,$$

la cual, dado que y_1 es solución particular, se transforma en

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} + P(x)\left[\frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2}\right] + \frac{1}{u}Q(x) = 0.$$

Al multiplicar por $-u^2$ la ecuación queda

$$\frac{du}{dx} - P(x)[2y_1 u + 1] - uQ(x) = 0,$$

es decir,

$$\frac{du}{dx} - 2y_1 uP(x) - P(x) - uQ(x) = 0,$$

al reagrupar los términos conseguimos la ecuación

$$\frac{du}{dx} - u[2P(x)y_1 + Q(x)] = P(x);$$

esta es una ecuación lineal en u.

Ejemplo 14.6.6. *Resuelva la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2 - x^3} + \frac{x-2}{x - x^2}y = 0.$$

Solución.

Es una ecuación Ricatti; dado que el término $R(x)$ es nulo entonces una solución particular es $y_1(x) = 0$. Siguiendo la metodología dada anteriormente, realicemos la transformación $y = 0 + \frac{1}{u}$, tenemos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx},$$

reemplazando en la ecuación obtenemos

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} + \frac{\frac{1}{u^2}}{x^2 - x^3} + \frac{1}{u}\frac{x-2}{x-x^2} = 0,$$

de la cual deducimos

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2 - x^3} - \frac{x-2}{x-x^2}u = 0,$$

así, la ecuación lineal que conseguimos es

$$\frac{du}{dx} - \frac{x-2}{x-x^2}u = \frac{1}{x^2 - x^3}. \qquad (**)$$

El factor integrante es $\rho(x) = e^{-\int \frac{x-2}{x-x^2}dx}$.

Calculemos $\int \frac{x-2}{x-x^2}dx$ usando fracciones parciales; tenemos,

$$\frac{x-2}{x-x^2} = \frac{x-2}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x},$$

deducimos que $x - 2 = A(a - x) + Bx$ de donde obtenemos $A = -2$, $B = -1$, así,

$$\frac{x-2}{x-x^2} = \frac{-2}{x} + \frac{-1}{1-x}$$

y entonces

$$\int \frac{x-2}{x-x^2}dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{-1}{1-x}\right) dx = -2\ln(x) + \ln(1-x).$$

El factor integrante es entonces,

$$\rho(x) = e^{-\int \frac{x-2}{x-x^2}dx} = e^{2\ln(x)-\ln(1-x)} = e^{\ln\left(\frac{x^2}{1-x}\right)} = \frac{x^2}{1-x}.$$

Al multiplicar la ecuación $(**)$ por el factor integrante conseguimos

$$\frac{x^2}{1-x}\frac{du}{dx} - \frac{x^2}{1-x}\frac{x-2}{x-x^2}u = \frac{x^2}{1-x}\frac{1}{x^2-x^3},$$

entonces podemos escribirla como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{1-x}u\right) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

es decir

$$d\left(\frac{x^2}{1-x}u\right) = \frac{1}{(1-x)^2}dx;$$

al integrar obtenemos $\frac{x^2}{1-x}u = \frac{1}{1-x} + C$, despejando tenemos

$$u = \frac{1}{x^2} + C\frac{1-x}{x^2},$$

y como $u = \frac{1}{y}$ entonces la solución general es

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + C\frac{1-x}{x^2};$$

naturalmente que realizando arreglos algebraicos podemos conseguir $y = \frac{x^2}{1+C-Cx}$.

14.7. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Definición 14.7.1. Si $u(x,y)$ es una función continua y con primeras derivadas parciales continuas entonces la diferencial total de u es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Definición 14.7.2. La expresión

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

se llama "diferencial exacta" si existe alguna función $u(x,y)$ para la cual esta expresión es la diferencial de u, es decir $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es diferencial exacta si existe alguna función tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y).$$

Definición 14.7.3. La ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se llama ecuación diferencial exacta si y sólo si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta.

Teorema 14.7.1. *La ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ es exacta si y sólo si $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$.*

Demostración. (Sólo una parte de ella). Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es la diferencial exacta de alguna función $u(x,y)$ entonces

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

así, $M = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial u}{\partial y}$, derivando obtenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

suponiendo que las segundas derivadas parciales son continuas conseguimos $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. □

Teorema 14.7.2. *La solución general de la ecuación diferencial exacta*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

está dada por $u(x,y) = C$ donde $u(x,y)$ es tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N, \quad C = C^{te}.$$

Demostración. Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta entonces existe una función $u = u(x,y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, así, $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$, es decir, $du = 0$, de donde $u = C$ es solución general. □

Ejemplo 14.7.1. *Resuelva la ecuación* $(2xy+1)dx + (x^2+4y)dy = 0$.

Solución.
La ecuación $(2xy+1)dx + (x^2+4y)dy = 0$ es exacta si $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$. Como

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+4y) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy+1) = 2x,$$

entonces la ecuación es exacta, así, existe $u = u(x,y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 4y \end{cases}$$

integrando la primera ecuación del sistema obtenemos

$$u = \int (2xy+1)dx + \varphi(y) = x^2y + x + \varphi(y),$$

ahora, derivando con respecto de y, la expresión que obtenemos es

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{d}{dy}(\varphi(y)).$$

Al comparar con la segunda ecuación del sistema tenemos

$$x^2 + 4y = x^2 + \frac{d}{dy}(\varphi(y)),$$

es decir, $\frac{d}{dy}(\varphi(y)) = 4y$, así,

$$\varphi(y) = \int 4y\,dy + C_1 = 2y^2 + C_1,$$

entonces $u = x^2y + x + 2y^2 + C_1$. Como la solución de la ecuación es $u(x,y) = C$ entonces la solución general para la ecuación planteada es $u = x^2y + x + 2y^2 + C_1 = C$, es decir, $x^2y + x + 2y^2 = K$ donde $K = C - C_1$.

Ejemplo 14.7.2. *Resuelva* $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0$.

Solución. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y^3}\right) = -\frac{6x}{y^4} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2-3x^2}{y^4}\right) = -\frac{6x}{y^4}$$

entonces la ecuación diferencial es Exacta, así, existe $u = u(x,y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$.

De $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3}$ concluimos que $u = \int \frac{2x}{y^3} dx + f(y)$, entonces $u = \frac{x^2}{y^3} + f(y)$.

Como $\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y^3} + f(y)\right) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

derivando obtenemos

$$-\frac{3x^2}{y^4} + f'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

al despejar la derivada tenemos $f'(y) = \frac{1}{y^2}$. Debemos determinar $f(y)$; naturalmente que $f(y) = \int \frac{dy}{y^2} + C_1$, es decir, $f(y) = -\frac{1}{y} + C_1$.

Como la solución de la ecuación exacta es $u = C$ entonces, de $u = \frac{x^2}{y^3} + f(y)$ obtenemos $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1 = C$; finalmente la solución general es $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = K$ con $K = C - C_1$.

14.8. FACTORES INTEGRANTES

A veces tenemos ecuaciones diferenciales no exactas, escritas en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

las cuales se pueden convertir en exactas multiplicando sus términos por un factor integrante adecuado.

Por ejemplo, la ecuación $ydx - xdy = 0$ no es una ecuación diferencial exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1,$$

sin embargo, si multiplicamos por $\frac{1}{y^2}$ obtenemos $\frac{y}{y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$, la cual es exacta, ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2};$$

ahora podríamos seguir el método de solución ya estudiado.

Notemos que la ecuación original se puede solucionar por el método de variables separables (la solución sería, $y = Cx$), sin embargo, se muestra este método sólo para ejemplificar; por otro lado al multiplicar por $\frac{1}{y^2}$ podríamos escribir, $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$, donde el primer miembro es la diferencial de $\frac{x}{y}$, así, $d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, de donde, integrando obtenemos $\frac{x}{y} = C$; en esto último radica la potencia del método.

Definición 14.8.1. Un Factor Integrante para la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es una función $\rho(x, y)$ tal que $\rho(x, y)M(x, y)dx + \rho(x, y)N(x, y)dy = 0$ es exacta.

Ejemplo 14.8.1. *La ecuación diferencial de variables separables* $ydx + \sec(x)dy = 0$ *no es exacta ya que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\sec(x))}{\partial x} = \sec(x)\tan(x),$$

sin embargo, si multiplicamos por $\frac{1}{y\sec(x)}$ *obtenemos* $\cos(x)dx + \frac{1}{y}dy = 0$ *que es una ecuación diferencial exacta ya que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\cos(x))}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial x},$$

la solución de la ecuación es $\sin(x) + \ln(y) = C$.

Desgraciadamente no se conoce un método general para encontrar un Factor Integrante explicito, sin embargo, existen algunas ecuaciones en que podemos determinar sistemáticamente al Factor Integrante.

14.8.1. Factor Integrante Sistemático

Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

a) Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ entonces

$$\rho(x,y) = e^{\int f(x)dx}.$$

b) Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$ entonces

$$\rho(x,y) = e^{\int g(y)dy}.$$

c) Si $M = yf(x,y)$, $N = xg(x,y)$ entonces

$$\rho(x,y) = \frac{1}{xM - yN}.$$

Veamos el caso a).

Supongamos que $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$ y definamos $\rho(x,y) = e^{\int f(x)dx}$ entonces, al multiplicar la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ por $\rho(x,y) = e^{\int f(x)dx}$ obtenemos, en forma simplificada, la ecuación $\rho Mdx + \rho Ndy = 0$.

Como

$$\frac{\partial(\rho N)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\cdot N + \rho\cdot\frac{\partial N}{\partial x} \overset{*}{=} \rho\cdot\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\cdot N + \rho\cdot\frac{\partial N}{\partial x} = \rho\cdot\frac{\partial M}{\partial y}$$

y, como por otro lado, se puede verificar de manera análoga que, $\frac{\partial(\rho M)}{\partial y} = \rho\cdot\frac{\partial M}{\partial y}$ entonces la ecuación diferencial $\rho Mdx + \rho Ndy = 0$ es exacta.

*: Si $\rho(x,y) = e^{\int f(x)dx}$ entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial x} &= e^{\int f(x)dx} \cdot \frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dx} \\ &= e^{\int f(x)dx} \cdot f(x) \\ &= \rho(x,y) \cdot f(x) \\ &= \rho \cdot \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 14.8.2. *Resuelva la ecuación* $y^2\cos(x)dx + (4 + 5y\sin(x))dy = 0$.

Solución.

La ecuación planteada no obedece a los métodos anteriores, intentamos Factor Integrante; como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(x)) = 2y\cos(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4 + 5y\sin(x)) = 5y\cos(x)$$

y además

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{5y\cos(x) - 2y\cos(x)}{y^2\cos(x)} = \frac{3}{y} = g(y),$$

entonces el factor integrante es

$$\rho(y) = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln(y)} = y^3.$$

Al multiplicar la ecuación original por este Factor Integrante obtenemos la ecuación diferencial

$$y^5\cos(x)dx + (4y^3 + 5y^4\sin(x))dy = 0$$

que es exacta ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = 5y^4\cos(x) = \frac{\partial N}{\partial x}$ así, existe la función $u(x,y)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x} = M$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = N$. Tenemos $\frac{\partial u}{\partial x} = y^5\cos(x)$, de donde $u = \int y^5\cos(x)dx = y^5\sin(x) + \varphi(y)$; derivando con respecto de y obtenemos $\frac{\partial u}{\partial y} = 5y^4\sin(x) + \varphi'(y)$, así,

$$5y^4\sin(x) + \varphi'(y) = 4y^3 + 5y^4\sin(x),$$

concluimos que $\varphi'(y) = 4y^3$ de donde $\varphi(y) = \int 4y^3dy + C_1 = y^4 + C_1$, finalmente, la solución general es $y^5\sin(x) + y^4 = C$.

14.8.2. Factor Integrante por inspección

Existen muchas ecuaciones para las cuales el Factor Integrante se puede encontrar por inspección, lo que implica la búsqueda de una agrupación de términos que muestren la diferencial de alguna función conocida.

Por ejemplo, la presencia de $ydx+xdy$ sugiere una función de xy como Factor Integrante dado que $d(xy) = xdy + ydx$. De manera análoga, las diferenciales $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx-xdy}{y^2}$, $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy-ydx}{x^2}$ sugieren la búsqueda de las expresiones $ydx-xdy$, $xdy-ydx$ que conducen a factores integrantes de la forma $\frac{1}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$ y $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)$ respectivamente.

Veamos algunos ejemplos que nos indicaran el camino.

Ejemplo 14.8.3. *Resuelva la ecuación* $ydx + (x + x^2y)dy = 0$.

Solución.

Al desarrollar la ecuación obtenemos $ydx + xdy + x^2ydy = 0$, la presencia de la expresión $xdy + ydx$, contenida en la ecuación sugiere un Factor Integrante función de xy; como en el tercer término x^2ydy nos conviene eliminar x^2, para que, sin la presencia de él, el término que queda sea integrable de manera inmediata, concluimos que el Factor Integrante, función de xy es $\frac{1}{(xy)^2}$, tenemos

$$\frac{ydx + xdy}{(xy)^2} + \frac{x^2y}{(xy)^2}dy = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$(xy)^{-2}d(xy) + \frac{1}{y}dy = 0,$$

integrando esta última expresión obtenemos

$$\int (xy)^{-2}d(xy) + \int \frac{1}{y}dy = C,$$

es decir, la solución general es $-\frac{1}{xy} + \ln(x) = C$.

Ejemplo 14.8.4. *Resuelva la ecuación* $(xy^4 + y)dx - xdy = 0$.

Solución.

Al desarrollar la ecuación tenemos $xy^4dx + ydx - xdy = 0$, la presencia de $ydx - xdy$ sugiere un Factor Integrante de la forma $\frac{1}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)$; como debemos eliminar el factor y^4 del término xy^4dx produciendo con ello que el término que quede, sea integrable de manera inmediata, el Factor Integrante es $\frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^2$; tenemos,

$$\frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 xy^4dx + \frac{1}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^2 (ydx - xdy) = 0,$$

con algunos arreglos algebraicos obtenemos

$$x^3dx + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{ydx - xdy}{y^2} = 0,$$

es decir,

$$x^3dx + \left(\frac{x}{y}\right)^2 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

al integrar tenemos

$$\int x^3dx + \int \left(\frac{x}{y}\right)^2 d(xy) = C,$$

es decir, la solución general es $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3}(\frac{x}{y})^3 = C$.

14.9. ALGUNAS APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Ecuaciones diferenciales y Modelos matemáticos

Los siguientes ejemplos muestran el proceso de "traducir" leyes y principios científicos en Ecuaciones Diferenciales, interpretando razones de cambio como derivadas; generalmente la variable independiente es el tiempo t.

Ejemplo 14.9.1. ***Ley de Enfriamiento de Newton***
La ley de enfriamiento de Newton dice, "La tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo, con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura A del medio ambiente".

La ecuación que se produce es

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),\ k > 0$$

la cual se puede tratar como una ecuación de variables separables tanto como lineal.

Notemos que, si $T > A$ entonces $\frac{dT}{dt} < 0$, de modo que la temperatura $T(t)$ es una función decreciente del tiempo t y el cuerpo se esta enfriando; si $T < A$ entonces $\frac{dT}{dt} > 0$ y el cuerpo se esta calentando.

Para valores de la constante k y temperatura ambiental constante A podemos determinar una fórmula explicita para $T(t)$.

Resolvamos la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} = k(A-T) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dT}{A-T} = kdt \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{dT}{A-T} = \int kdt + C_1 \\
&\Rightarrow \quad -\ln(A-T) = kt + C_1 \\
&\Rightarrow \quad \ln(A-T) = -kt + C_2 \\
&\Rightarrow \quad A - T = e^{-kt+C_2} \\
&\Rightarrow \quad A - T = e^{-kt}e^{C_2} \\
&\Rightarrow \quad A - T = C_3 e^{-kt} \\
&\Rightarrow \quad T = A + Ce^{-kt}.
\end{aligned}$$

Así, el fenómeno esta gobernado por la ecuación $T(t) = A + Ce^{-kt}$.

Ejemplo 14.9.2. ***Ley de Torricelli***
La ley de Torricelli dice, "La tasa de cambio con respecto del tiempo del volumen V de agua en un tanque que se vacía, es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad y del agua en el tanque".

La ecuación que se obtiene es

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}.$$

Ejemplo 14.9.3. ***Crecimiento o decrecimiento poblacional***

La tasa de cambio, con respecto del tiempo, de una población $P(t)$*, con índices constantes de nacimiento y mortalidad, es, en muchos casos simples, proporcional al tamaño de la población, en este caso, la ecuación que se produce es*

$$\frac{dP}{dt} = kP,\ k = C^{te}.$$

Cada función de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ *es solución de la ecuación diferencial* $\frac{dP}{dt} = kP$*, ya que*

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Ce^{kt}\right) = Ce^{kt}k = kP.$$

Aunque el valor de la constante k *sea conocido, la ecuación diferencial* $\frac{dP}{dt} = kP$ *tiene infinitas soluciones* $P(t) = Ce^{kt}$ *que dependen del valor de* C *y nos interesaría conocer una solución particular del fenómeno; para ello debemos realizar algunas observaciones en el fenómeno que deseamos modelar.*

Por ejemplo, supongamos que $P(t) = Ce^{kt}$ *es la población de una colonia de bacterias en el tiempo t, que la población inicial de bacterias fue de 1000 y que después de tres horas de observación, desde el inicio del proceso, se detectan 2000 bacterias. Esta información adicional acerca de* $P(t)$ *nos conduce a las siguientes ecuaciones, cuya solución nos permitirá caracterizar el proceso,*

$$\begin{cases} P(0) = 1000 = Ce^{k\cdot 0} & \textit{(1)} \\ P(3) = 2000 = Ce^{2k} & \textit{(2)} \end{cases}$$

De (1) obtenemos $C = 1000$ *y reemplazando en (2), la ecuación* $2000 = 1000e^{2k}$ *nos permitirá conocer el valor de* k*,*

$$2000 = 1000e^{2k} \Rightarrow 2 = e^{2k} \Rightarrow \ln(2) = 2k \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{2} = 0,34657359;$$

así entonces, la ecuación que modela el fenómeno es

$$P(t) = 1000e^{0,34657359t}.$$

Observemos que $e^{kt} = e^{\frac{\ln(2)}{2}t} = e^{\ln(2)\cdot\frac{t}{2}} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{t}{2}} = 2^{\frac{t}{2}}$*, de donde la ecuación se escribe*

$$P(t) = 1000 \cdot 2^{\frac{t}{2}}.$$

Con esta ecuación podemos determinar, por ejemplo, la cantidad de bacterias que habría al término de 4 horas; ella sería $P(4) = 1000 \cdot 2^{\frac{4}{2}} = 4000$*; note que con la primera ecuación, el valor es* $P(4) = 3999,999996$*.*

14.10. TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Definición 14.10.1. Dos familias uniparamétricas de curvas son isogonales si cada miembro de una de ellas corta a cada miembro de la otra familia en un ángulo constante α. Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entonces las familias son ortogonales.

Por ejemplo, la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$ y la familia de rectas $y = mx$ son familias ortogonales.

Esto es evidente geométricamente o visto de otra manera, si $x^2 + y^2 = c^2$ entonces, derivando implícitamente obtenemos $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ de donde $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; considerando la otra familia $y = mx$ obtenemos $\frac{dy}{dx} = m$; es inmediato que las curvas son ortogonales ya que $\left(-\frac{x}{y}\right) m = \left(-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right) = -1$.

Para casos más generales, veamos el método analítico siguiente.

Teorema 14.10.1. *Si $F(x, y, y') = 0$ es la ecuación diferencial de una familia uniparamétrica entonces $F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$ es la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales.*

Demostración. Sean $F(x, y, y') = 0$ y $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y'}) = 0$ la ecuación de las familias ortogonales y f_1, f_2 dos curvas arbitrarias mutuamente ortogonales. Si $P(x, y)$ es un punto común de f_1 y f_2 entonces $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{y'} = -\frac{1}{y'}$, así, $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y'}) = F\left(x, y, -\frac{y}{y'}\right) = 0$. □

Observación 14.10.1. El método para hallar la familia de curvas ortogonales a una familia de curvas determinada es,

1. Encontrar la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ de la familia dada.
2. Sustituir $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$ para obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales.
3. Resolver esta última ecuación $-\frac{dx}{dy} = f(x, y)$.

Ejemplo 14.10.1. *Determine la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = c^2$.*

Solución.

Al derivar $x^2 + y^2 = c^2$ obtenemos $x + y\frac{dy}{dx} = 0$, que es la ecuación diferencial de la familia de circunferencias; reemplazando $\frac{dy}{dx}$ por $-\frac{dx}{dy}$ es la ecuación previa obtenemos $x + y\left(-\frac{dx}{dy}\right) = 0$, que corresponde a la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales buscada; debemos resolver esta última ecuación,

$$\begin{aligned} x + y\left(-\frac{dx}{dy}\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = y\frac{dx}{dy} \\ &\Rightarrow \quad \frac{x}{dx} = \frac{y}{dy} \\ &\Rightarrow \quad \ln(x) = \ln(y) + K \\ &\Rightarrow \quad \ln(x) = \ln(y) + \ln(C_1) \text{ con } \ln(C_1) = K \\ &\Rightarrow \quad \ln(x) = \ln(C_1)^y \\ &\Rightarrow \quad x = C_1 y \\ &\Rightarrow \quad y = Cx \end{aligned}$$

tal que $C = \frac{1}{C_1}$.

Ejemplo 14.10.2. *Determine la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de ecuación $y = Cx^4$.*

Solución.

La ecuación diferencial asociada a la ecuación $y = Cx^4$ es $\frac{dy}{dx} = 4Cx^3$, debemos adicionalmente, determinar la constante C; como $C = \frac{y}{x^4}$ entonces, reemplazando en la ecuación diferencial obtenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$.

La ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es $-\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{x}$. Resolvemos esta última ecuación,

$$\begin{aligned} -\frac{dx}{dy} = \frac{4y}{x} \quad &\Rightarrow \quad -xdx = 4ydy \\ &\Rightarrow \quad -\frac{x^2}{2} = 2y^2 + C_1 \\ &\Rightarrow \quad -x^2 = 4y^2 + C_2 \text{ donde } C_2 = 2C_1 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + 4y^2 = C^2, \text{ con } C^2 = -C_2, \end{aligned}$$

es la ecuación pedida.

Ejemplo 14.10.3. *Determine la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de ecuación $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$.*

Solución.

Derivando $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$ tenemos

$$4\frac{dy}{dx} + 2x + 2Ce^{2y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

debemos reemplazar C y encontrar la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$,

$$\begin{aligned} 4\frac{dy}{dx} + 2x + 2Ce^{2y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(4 + 2Ce^{2y}) = -2x \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2 + Ce^{2y}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2 + (-4y - x^2 - 1)} \quad \text{ya que} \quad Ce^{2y} = -4y - x^2 - 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1 - 4y - x^2}. \end{aligned}$$

Ahora, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{1 - 4y - x^2}.$$

Debemos resolver esta última ecuación; conviene escribirla como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 4y - x^2}{x},$$

así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{4y}{x} - x,$$

la cual es la ecuación diferencial lineal en y,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y = \frac{1}{x} - x.$$

El factor integrante es

$$\rho(x) = e^{\int \frac{4}{x}dx} = e^{4\ln(x)} = x^4,$$

de donde obtenemos

$$x^4 y = \int x^4 \left(\frac{1}{x} - x\right) dx + C.$$

Esta tiene solución

$$x^4 y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + C$$

de donde $y = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{C}{x^4}$ es la ecuación pedida.

14.11. ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Introducción

En esta sección nos interesa resolver ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden n con coeficientes constantes. Para ello daremos la teoría básica necesaria que sustenta esta tarea, como por ejemplo, reducción de orden, el determinante Wronskiano, determinación de una segunda solución conocida otra, haciendo un énfasis en las ecuaciones de segundo orden.

Definición 14.11.1. La ecuación diferencial lineal general de orden n tiene la forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = G(x).$$

Suponemos que los coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ y la función $G(x)$ son funciones continuas en cierto intervalo abierto I, sin embargo no necesariamente deben ser funciones lineales.

Por ejemplo, la ecuación $e^x y'' + \sin(x)y' + (1 + \sqrt{x})y = \tan(x)$ es lineal ya que la variable dependiente y sus derivadas aparecen linealmente, en tanto que la ecuación $y'' + (y')^2 + 4y^2 = 0$ no es lineal.

Un problema de valor inicial para una ecuación diferencial lineal de orden n consiste en resolver la ecuación

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = G(x), \tag{14.2}$$

sujeta a $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ donde $y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ son constantes.

Buscamos una solución en un intervalo I que contiene a x_0.

Teorema 14.11.1. Existencia y unicidad de la solución.

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), G(x)$ funciones continuas en cierto intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ para todo x en I. Si $x_0 \in I$ entonces existe una solución $y(x)$ del problema de valor inicial (14.2) *en el intervalo I y esa solución es única.*

Ejemplo 14.11.1. *Es fácil verificar que $y = 2e^{3x} + \frac{1}{12}x^4e^{3x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x}$ y que satisface la condición inicial $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$. La ecuación diferencial es lineal, los coeficientes así como $G(x) = x^2e^{3x}$ son funciones continuas en cualquier intervalo que contiene a $x = 0$, luego, por el teorema anterior, la solución es única.*

Observación 14.11.1. Para la ecuación lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = G(x)$$

sujeta a $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, una solución es una función $y = f(x)$ definida en un intervalo I cuyo gráfico pasa por (x_0, y_0) tal que la pendiente de la curva en el punto es y_0'.

14.11.1. Casos simples de reducción de orden

En ciertos casos es posible reducir el orden de una ecuación diferencial, lo que hace más fácil su integración. Algunas de los casos más frecuentes son los siguientes.

La ecuación no contiene la función buscada y sus derivadas hasta el orden $k-1$

La ecuación es

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{14.3}$$

Con el cambio de variable $y^{(k)} = p$, el orden de la ecuación (14.3) puede ser reducido a $n-k$; la forma que tiene ahora es

$$F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0.$$

De esta ecuación se determina p y la función y se determina de la ecuación $y^{(k)} = p$ integrando k veces. En el caso particular de la ecuación de segundo orden que no contiene a la función y, el cambio de variable $y' = p$ conduce a una ecuación de primer orden.

Ejemplo 14.11.2. *Resuelva la ecuación* $y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0$.

Solución.

Haciendo $y^{(4)} = p$ la ecuación original queda $\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x}p = 0$, al separar variables e integrar obtenemos $\ln(p) = \ln(x) + \ln(C)$, es decir, $p = Cx$, es decir, $y^{(4)} = Cx$, entonces al integrar 4 veces obtenemos

$$y^{(3)} = \frac{C}{2}x^2 + C_1 \quad , \quad y^{(2)} = \frac{C}{6}x^3 + C_1 x + C_2 \quad ,$$

$$y' = \frac{C}{24}x^4 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \quad , \quad y = \frac{C}{120}x^5 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4,$$

es decir, $y = K_1 x^5 + K_2 x^3 + K_3 x^2 + K_4 x + K_5$.

La ecuación no contiene la variable independiente

La ecuación es

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Por medio del cambio de variable $y' = p$, el orden de la ecuación se reduce en una unidad.

Como $p = p(y)$ entonces todas las derivadas $\frac{d^k y}{dx^k}$ deben expresarse mediante las derivadas de p con respecto de y, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= p \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2
\end{aligned}$$

y así sucesivamente para las otras derivadas.

Es inmediato que $\frac{d^n y}{dx^n}$ se expresa mediante las derivadas de p con respecto de y, de orden no superior a $n-1$, lo cual, precisamente indica la disminución en una unidad en el orden de la ecuación. En particular, si la ecuación diferencial de segundo orden no contiene a la variable independiente x, tal sustitución conduce a una ecuación diferencial de primer orden.

Ejemplo 14.11.3. *Resuelva la ecuación* $y'' = (y')^2$.

Solución.

Sea $\frac{dy}{dx} = p$, luego $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$ de donde la ecuación original queda $p\frac{dp}{dy} = p^2$; separando variables e integrando obtenemos $p = Ce^y$, ahora la ecuación es $\frac{dy}{dx} = Ce^y$ y su solución es $-e^{-y} = Cx + D$, de donde $y = Ke^x$.

14.11.2. Dependencia e independencia lineal

Definición 14.11.2. Se dice que las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son linealmente dependientes sobre el intervalo I si existen constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, no todas nulas, tal que $a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_nf_n = 0$, $\forall\, x \in I$. Si los únicos escalares que satisfacen la igualdad son todos nulos entonces las funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 14.11.4. *Las funciones* $e^{k_1x}, e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$*, donde* $k_i \neq k_j$ *si* $i \neq j$ *son linealmente independientes en cualquier intervalo real.*

Consideremos la combinación lineal

$$a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} + \cdots + a_ne^{k_nx} = 0 \qquad (*)$$

y supongamos que las funciones son linealmente dependientes, entonces existe algún escalar no nulo, supongamos que $a_n \neq 0$.
Dividiendo la igualdad $(*)$ *por* e^{k_1x} *y derivando obtenemos*

$$a_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + \cdots + a_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} = 0 \qquad (**)$$

que es una combinación lineal de $n-1$ *funciones exponenciales con diferentes exponentes.*

Dividiendo la igualdad $(**)$ *por* $e^{(k_2-k_1)x}$ *y derivando, obtenemos una combinación lineal entre de* $n-2$ *funciones exponenciales con diferentes exponentes.*

Prosiguiendo este proceso $n-1$ *veces obtenemos*

$$a_n(k_n - k_1)(k_n - k_2)\ldots(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x} = 0$$

lo que es una contradicción ya que por hipótesis $a_n \neq 0$ *y* $k_i \neq k_j$ *para* $i \neq j$.

Ejemplo 14.11.5. *Las funciones* $f_1(x) = 1 + \tan^2(x), f_2(x) = 2\sec^2(x), f_3(x) = e^x$ *son linealmente dependientes ya que* $-2(1 + \tan^2(x)) + 1(2\sec^2(x)) + 0e^x = 0$.

14.11.3. El determinante Wronskiano

Cuando tenemos una gran cantidad de funciones $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y deseamos analizar la linealidad de tal conjunto nos enfrentamos a una gran cantidad de cálculos en el procesos de determinar que se pueda o no encontrar valores no triviales de los coeficientes, felizmente tenemos el determinante Wronskiano (G. Wronsky (1775-1853)), denotado

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

que nos ayuda en la tarea.

Teorema 14.11.2. *Supongamos que las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tienen al menos $n-1$ derivadas. Si*

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

por lo menos en un punto del intervalo I entonces $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Demostración. Consideremos la combinación lineal

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0$$

entonces, derivando $n-1$ veces conseguimos el sistema

$$\begin{cases} a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0 \\ a_1 f_1' + \cdots + a_n f_n' = 0 \\ \vdots \\ a_1 f_1^{(n-1)} + \cdots + a_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Del capitulo Sistemas de Ecuaciones Lineales, sabemos que un sistema lineal homogéneo tiene una solución no trivial si el determinante de sus coeficientes es igual a cero. En el sistema hemos formado, las a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son las incógnitas y entonces el determinante de coeficientes es $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, así $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$ lo que constituye una contradicción. □

Ejemplo 14.11.6. *Demuestre que las funciones $f_1(x) = e^{3x}$, $f_2(x) = e^{-2x}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.*

Solución. Como

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -5e^{x} \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces las funciones son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

Teorema 14.11.3. Principio de Superposición.

Si las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son cada una solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en el intervalo I entonces la combinación lineal

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

también es solución.

Demostración. Lo haremos para el caso $n = 2$.

Sean y_1, y_2 dos soluciones en el intervalo I, de la ecuación diferencial homogénea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Debemos demostrar que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también es solución.

Si $y = C_1y_1 + C_2y_2$ entonces $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$ de donde $y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$, así se cumple

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= \left(C_1y_1'' + C_2y_2''\right) + p(x)\left(C_1y_1' + C_2y_2'\right) + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Corolario 14.11.1. *El número máximo de soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial homogénea es igual a su orden.*

Ejemplo 14.11.7. *Se puede verificar que* $y_1(x) = \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x)$ *son dos soluciones de la ecuación* $y'' + y = 0$*; también se puede verificar que la combinación lineal de ellas* $y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$ *es solución general.*

14.11.4. Construcción de una segunda solución a partir de una solución conocida

En una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden podemos determinar una solución general a partir de una solución conocida. Supongamos que $y_1(x)$ es solución no nula de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y deseamos construir la segunda solución particular.

Si miramos una de las ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden más sencillas como es la ecuación $y'' - y = 0$, podemos verificar fácilmente que $y_1(x) = e^x$ es solución de la ecuación y entonces podríamos intentar una segunda solución de la forma $y_2(x) = u(x)e^x$. Hagámoslo así, entonces se debe cumplir $y_2'' - y_2 = 0$.

Como $y_2' = ue^x + e^xu'$ entonces $y'' = ue^x + 2e^xu' + e^xu''$ de donde, $y_2'' - y_2 = 0$ nos indica que se debe cumplir $y_2'' - y_2 = e^x(u'' + 2u') = 0$; esto requiere que se cumpla $u'' + 2u' = 0$, debemos resolver esta última ecuación.

Sea $u' = w$ entonces $u'' = w'$ y la ecuación $u'' + 2u' = 0$ se convierte en $w' + 2w = 0$; al resolverla como ecuación diferencial lineal con factor integrante $\rho(x) = e^{2x}$ obtenemos $\frac{d}{dx}(e^{2x}w) = 0$, así, $e^{2x}w = C$, de donde $w = Ce^{-2x}$.

La ecuación que se genera es

$$\frac{du}{dx} = Ce^{-2x}$$

cuya solución es

$$u = -\frac{C}{2}e^{-2x} + K$$

y entonces la segunda solución es

$$y_2(x) = u(x)e^x = -\frac{C}{2}e^{-x} + Ke^x;$$

escogiendo $C = -2$, $K = 0$, la segunda solución es

$$y_2(x) = e^{-x}.$$

Como $W(y_1, y_2) \neq 0$ entonces las dos soluciones son linealmente independientes y la solución general es combinación lineal de estas.

Veamos el caso general.

La ecuación $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, $a_2(x) \neq 0$, se puede escribir como

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{14.4}$$

con $P(x)$, $Q(x)$ funciones continuas en cierto intervalo I.

Supongamos que $y_1(x)$ es solución conocida de la ecuación (14.4) y que $y_1(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, definamos $y_2(x) = u(x)y_1(x)$, entonces $y_2' = uy_1' + y_1u'$, además $y_2'' = uy_1'' + u'y_1' + y_1'u' + y_1u''$, reemplazando estas últimas derivadas en (14.4) y reordenando obtenemos $u(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1) + y_1u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0$, como $y_1(x)$ es solución de la ecuación (14.4) entonces la última ecuación queda

$$y_1u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0. \tag{14.5}$$

Con el cambio de variable $w = u'$ la ecuación (14.5) queda $y_1w' + (2y_1' + P(x)y_1)w = 0$, la cual es lineal y también de variables separables, tratándola bajo esta última clasificación tenemos

$$y_1\frac{dw}{dx} + (2y_1' + P(x)y_1)w = 0,$$

es decir,

$$\frac{dw}{w} + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right)dx = 0,$$

al integrar conseguimos $\ln(w) + 2\ln(y_1) = -\int P(x)dx + C$, o sea,

$$\ln(wy_1^2) = -\int P(x)dx + C,$$

si tomamos exponencial obtenemos $wy_1^2 = C_1e^{-\int P(x)dx}$; al despejar w la expresión es $w = \frac{du}{dx} = C_1\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$, de tal manera que $u = C_1\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + C_2$, así, $y_2(x) = u(x)y_1$ es

$$y_2(x) = C_1y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + C_2y_1(x).$$

Haciendo $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ obtenemos $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$. Usted puede verificar que y_2 satisface la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Note que,

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_1\int\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx \\ y_1' & y_1'\int\frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}dx+\frac{e^{-Pdx}}{y_1}\end{vmatrix}=e^{-\int Pdx}\neq 0.$$

Ejemplo 14.11.8. *Considere la ecuación diferencial* $x^2y''-7xy'+16y=0$ *y sea* $y_1=x^4$ *una solución particular. Determine una segunda solución y la solución general.*

Solución.
Escribimos la ecuación en la forma

$$y''-\frac{7}{x}y'+\frac{16}{x^2}y=0$$

entonces la segunda solución particular es

$$y_2=x^4\int\frac{e^{\int\frac{7}{x}dx}}{x^8}dx=x^4\int\frac{1}{x}dx=x^4\ln(x).$$

14.12. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

La ecuación diferencial

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0,$$

homogénea de orden n y con coeficientes constantes $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ es la que nos interesa resolver.

Basándonos en la ecuación diferencial lineal homogénea $\frac{dy}{dx}+ay=0$ que tiene solución exponencial $y=Ce^{-ax}$ en $\mathbb{R}$, resulta natural tratar de determinar si existen otras soluciones exponenciales. Lo extraordinario es que todas las soluciones (particulares) de la ecuación lineal homogénea de orden n y con coeficientes constantes son exponenciales o se construyen a partir de exponenciales.

Estudiemos la ecuación diferencial lineal homogénea

$$ay''+by'+cy=0,$$

donde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

Como $(e^{mx})'=me^{mx}$ y $(e^{mx})''=m^2e^{mx}$ entonces, es claro que las derivadas de primer y de segundo orden de la función $y=e^{mx}$ son múltiplo de e^{mx}, así, si sustituimos $y=e^{mx}$ en la ecuación $ay''+by'+cy=0$, cada término de la ecuación sería múltiplo de e^{mx}; esto nos sugiere que tratemos de encontrar un valor de m de modo que estos múltiplos de e^{mx} sumen cero, si hay éxito entonces $y=e^{mx}$ sería una solución de la ecuación.

Por ejemplo, si sustituimos $y=e^{mx}$ en la ecuación $y''-5y'+6y=0$ obtenemos $m^2e^{mx}-5me^{mx}+6e^{mx}=0$, esto indica que $\left(m^2-5m+6\right)e^{mx}=0$, esta ecuación se satisface para $m \in \mathbb{R}$ tal que $m^2 - 5m + 6 = 0$, es decir, para $m = 2$, $m = -3$; luego, $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = e^{-3x}$ que son linealmente independientes.

En el caso general tenemos $am^2e^{mx}+bme^{mx}+ce^{mx} = 0$, es decir, $e^{mx}(am^2+bm+c) = 0$, como $e^{mx} \neq 0$, $\forall\, x$, entonces debemos encontrar m tal que $am^2 + bm + c = 0$ para que $y = e^{mx}$ sea solución.

Esta última ecuación se llama ecuación auxiliar o ecuación característica de la ecuación diferencial y consideramos tres casos.

Caso 1.
Si $am^2 + bm + c = 0$ tiene dos raíces reales y distintas m_1, m_2 entonces las dos soluciones particulares son $y_1 = e^{m_1x}$, $y_2 = e^{m_2x}$. Como estas funciones son linealmente independientes entonces la solución general de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}.$$

Caso 2.
Si $am^2 + bm + c = 0$ tiene dos raíces reales iguales $m_1 = m_2$ entonces en realidad tenemos una solución exponencial del tipo $y_1 = e^{m_1x}$.

La segunda solución

$$y_2 = e^{m_1x}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{e^{2m_1x}}dx = e^{m_1x}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2m_1x}}dx = e^{m_1x}\int e^{x\left(-\frac{b}{a}-2m_1\right)}dx.$$

Como $am^2 + bm + c = 0$ tiene dos raíces reales iguales $m_1 = m_2$ entonces $m_1 = -\frac{b}{2a}$, asi, $-\frac{b}{a} + 2m_1 = 0$, luego $\int e^{x\left(-\frac{b}{a}+2m_1\right)}dx = x$ de donde $y_2 = xe^{m_1x}$.

Como $W(y_1, y_2) \neq 0$ entonces la solución general es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}.$$

Caso 3.
Si las soluciones de la ecuación característica $am^2 + bm + c = 0$ son las raíces complejas $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$ entonces la solución es

$$y = C_1e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

Observación 14.12.1. Como deseamos trabajar con funciones reales en lugar de funciones complejas entonces usando la ecuación de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

tenemos

$$e^{\beta ix} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x) \quad , \quad e^{-\beta ix} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$$

de donde la solución general podemos escribirla

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}(C_1e^{\beta ix} + C_2e^{-\beta ix}) \\ &= e^{\alpha x}(C_1(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) + C_2(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) \\ &= e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos(\beta x) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta x)). \end{aligned}$$

Puesto que las funciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ son linealmente independientes, denotando K_1 a $C_1 + C_2$ y K_2 a $(C_1 - C_2)i$, la solución general la escribimos

$$y = e^{\alpha x}(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x)).$$

Ejemplo 14.12.1. *Resuelva la ecuación* $y''' + y'' - 8y' - 12y = 0.$

Solución.

La ecuación característica es $m^3 + m^2 - 8m - 12 = 0$; una raíz es $m = 3$, al dividir $m^3 + m^2 - 8m - 12$ por $m = 3$ obtenemos el cuociente $m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$ entonces $m^3 + m^2 - 8m - 12 = (m - 3)(m + 2)^2 = 0$; las raíces de la ecuación son $m = 3$, $m = -2$ (de multiplicidad 2), entonces la solución general es

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x}.$$

Ejemplo 14.12.2. *Resuelva la ecuación* $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$

Solución.

La ecuación característica es $m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = 0$; una raíz es $m = 1$; al dividir $m^3 - 3m^2 + 4m - 2$ por $m = 1$ obtenemos el cuociente $m^2 - 2m + 2$ entonces

$$m^3 - 3m^2 + 4m - 2 = (m - 1)(m^2 - 2m + 2) = 0;$$

las raíces de la ecuación son $m = 1$, $m = 1 + i$, $m = 1 - i$, entonces la solución general es

$$y = C_1 e^x + e^x(C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)).$$

Ejemplo 14.12.3. *Resuelva la ecuación* $y'' + 16y = 0$ *sujeta a* $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

Solución.

La ecuación característica es $m^2 + 16 = 0$ cuyas raíces son $m = 4i$, $m = -4i$ de donde la solución general es

$$y = e^{0x}(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)).$$

Las condiciones iniciales nos sirven para determinar el valor de las constantes, $y(0) = 2 = C_1 \cos(0^\circ) + C_2 \sin(0^\circ)$, es decir, $C_1 = 2$, entonces la solución es

$$y = 2\cos(4x) + C_2 \sin(4x),$$

de donde $y' = -8\sin(4x) + 4C_2 \cos(4x)$; $y'(0) = -2 = -8\sin(0^\circ) + 4C_2 \sin(0^\circ)$, así, $C_2 = -\frac{1}{2}$.

La solución particular es $y = 2\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$.

14.13. UNA BREVE INTRODUCCIÓN A LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

14.13.1. Introducción

Una clase de transformación lineal de especial relevancia es la de integración, así, si $y = f(x)$ es una función definida en un intervalo finito $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ o en intervalo de longitud infinita y si $K(s, x)$ es una función fija que depende de la variable x y del parámetro s entonces definimos la función $F(s)$ como

$$T[f(x)] = \int_a^b K(s, x)f(x)dx = F(s).$$

La función $K(s, x)$ se llama núcleo de la transformación lineal T y evidentemente, T es lineal con independencia de la naturaleza de $K(s, x)$, es decir, se cumple

$$T[f(x) + g(x)] = T[f(x)] + T[g(x)]\,; \quad T[kf(x)] = kT[f(x)]\,, \quad k = C^{te}.$$

La transformación de Laplace es especialmente útil para simplificar el proceso de resolver problemas de valor inicial cuyas ecuaciones diferenciales son lineales y principalmente cuando se incluyen funciones discontinuas.

14.13.2. Definición de transformada de Laplace

Considere la función $f(t)$ definida en $(0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Se define la transformada de Laplace de $f(t)$, denotada $L\{f(t)\}$ por

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = F(s).$$

Observación 14.13.1.

1. Deberá existir la integral impropia dependiente del parámetro s, es decir, la integral deberá ser convergente para ciertos valores de s, en tal caso diremos que existe la transformada de Laplace de $f(t)$ o que $f(t)$ es L-transformable.

2. $L\{f(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f(t)dt = F(s)$

Ejemplo 14.13.1. *Si $f(t) = 1$, $t \geq 0$ entonces $L\{f(t)\} = L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ si $s > 0$, ya que*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}dt &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sb} - \left(-\frac{1}{s}e^{0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{s},
\end{aligned}$$

si el parámetro s es positivo, dado que en este caso $-\frac{1}{se^{sb}} \to 0$ si $b \to \infty$.

Ejemplo 14.13.2. *Si* $f(t)=e^{at}$, $t\geq 0$ *entonces* $L\{f(t)\}=L\left\{e^{at}\right\}=\frac{1}{s-a}$ *si* $s>a$. *En efecto,*

$$\begin{aligned} L\left\{e^{at}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \\ &= \int_0^\infty e^{t(a-s)}dt \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{a-s}e^{t(a-s)}\right)\Big|_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{a-s}e^{b(a-s)}-\frac{1}{a-s}e^{0}\right) \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s>a. \end{aligned}$$

Ejemplo 14.13.3. *Si* $f(t)=t^a$; $t\geq 0$, $a\in\mathbb{R}$, $a>-1$ *entonces*

$$L\{t^a\}=\frac{1}{s^{a+1}}\Gamma(a+1)$$

si $s>0$.

Al igual que en los ejemplos anteriores, lo demostramos calculando la integral impropia correspondiente, tenemos,

$$L\{f(t)\}=L\{t^a\}=\int_0^\infty e^{-st}t^a dt.$$

Esta integral impropia se puede resolver por integración por partes o mejor, usando la "función Gamma"; recordemos esta última.

La función Gamma, denotada $\Gamma(x)$ *se define por*

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

esta integral impropia converge para $x>0$ *y, entre otras propiedades cumple,*

a) $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$,

b) $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n\in\mathbb{N}$,

c) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Así, volviendo a la integral que deseamos calcular y con el cambio de variable $u=st$, *de donde* $du=sdt$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st}t^a dt &= \int e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^a\frac{du}{s} \\ &= \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a du \\ &= \frac{1}{s^{a+1}}\Gamma(a+1), \end{aligned}$$

con $s>0$ *tal que* $u=st>0$.

Observación 14.13.2.

1. $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

   Sabemos que el factorial de $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotado $n!$ es $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ con $0! = 1$ y usando $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n > 0$ entonces, por ejemplo $L\{t\} = \frac{1}{s^2}$, $L\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}$, $L\left\{t^3\right\} = \frac{6}{s^4}$; muy cómodo ya que nos evita el calcular las integrales impropias correspondientes.

2. Usando la linealidad de la Transformada de Laplace, es decir, usando

$$L\{f(t)+g(t)\} = L\{f(t)\} + L\{g(t)\}; \quad L\{kf(t)\} = kL\{f(t)\}, \quad k = C^{te},$$

   tenemos, por ejemplo:

   a)

$$\begin{aligned} L\left\{2t^2+5t+7\right\} &= 2L\left\{t^2\right\} + 5L\{t\} + 7L\{1\} \\ &= 2\frac{2}{s^3} + 5\frac{1}{s^2} + 7\frac{1}{s} \\ &= \frac{2+5s+7s^2}{s^3}. \end{aligned}$$

   b) $L\{\cosh(kt)\} = \frac{s}{s^2-k^2}$, $s > |k|$.

   Para demostrar esto, basta con usar $\cosh(kt) = \frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}$, $k > 0$ y la linealidad de la transformada.

14.13.3. Funciones y sus Transformadas

Algo similar a la tablas de derivadas e integrales inmediatas podemos presentar en la siguiente, breve tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$, $s > 0$
t^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
t^a, $a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $s > a$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$, $s > 0$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$, $s > 0$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$, $s > \lvert k\rvert$
$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$, $s > \lvert k\rvert$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k}$, $s > k$

14.13.4. La Transformada Inversa

Por medio de la definición de Transformada de Laplace de una función f hemos determinado otra función $F(s)$ tal que $L\{f(t)\} = F(s)$. Ahora, dada la función $F(s)$ queremos encontrar la función $f(t)$ que corresponde a esta transformada de Laplace, tal función es la transformada inversa

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}.$$

Podemos deducir la siguiente tabla

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$	$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
1	$\frac{1}{s},\ s > 0$	$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
t	$\frac{1}{s^2},\ s > 0$	$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$	$L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$
$t^a,\ a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}},\ s > a$	$L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(a+1)}{s^{n+1}}\right\} = t^a$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2},\ s > 0$	$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos(kt)$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2},\ s > 0$	$L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin(kt)$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2},\ s > \|k\|$	$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh(kt)$
$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2},\ s > \|k\|$	$L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \sinh(kt)$
e^{kt}	$\frac{1}{s-k},\ s > k$	$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{kt}$

Observación 14.13.3. La transformada inversa $L^{-1}\{F(s)\}$ es lineal.

Ejemplo 14.13.4. *Calcule* $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$.

Solución.
Como $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$, entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{1}{3!}L^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{1}{6}t^3.$$

Ejemplo 14.13.5. *Calcule* $L^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+7}\right\}$.

Solución.

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+7}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+7} - \frac{3}{s^2+7}\right\} \\ &= 2L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} \\ &= 2\cos(\sqrt{7}t) - \frac{3}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t). \end{aligned}$$

Ejemplo 14.13.6. *Calcule* $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$.

Solución.

Debemos separar la fracción racional $\frac{1}{s^2+3s}$ en fracciones parciales para llevar la transformada inversa a otras conocidas, tenemos,

$$\frac{1}{s^2+3s} = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} = \frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{1}{3}}{s+3},$$

de donde

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{s} - \frac{\frac{1}{3}}{s+3}\right\} \\ &= \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}. \end{aligned}$$

14.13.5. Teorema de Traslación

Hasta el momento las transformadas y las transformadas inversas han sido casi directas y expresiones, por ejemplo como $L\left\{e^{5t}t^3\right\}$ demandarían una gran cantidad de cálculos, esto también ocurre con las transformadas inversas. El siguiente Teorema de traslación nos ayuda.

Teorema 14.13.1. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *entonces* $L\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a)$ *donde* $F(s) = L\{f(t)\}$.

Demostración.

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)}f(t)dt = F(s-a).$$

$\square$

Si conocemos $L\{f(t)\} = F(s)$ entonces podemos calcular $L\left\{e^{at}f(t)\right\}$ de manera muy fácil, cambiamos $F(s)$ por $F(s-a)$.
Es muy útil la siguiente notación; $L\left\{e^{at}f(t)\right\} = L\{f(t)\}_{s\to s-a}$.

Ejemplo 14.13.7. *Calcule* $L\left\{e^{4t}t^3\right\}$.

Solución.

$$L\left\{e^{4t}t^3\right\} = L\left\{t^3\right\}_{s\to s-4} = \left.\frac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-4} = \frac{6}{(s-4)^4}.$$

Ejemplo 14.13.8. *Calcule* $L\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\}$.

Solución.

$$L\left\{e^{-3t}\cos(5t)\right\} = L\left\{\cos(5t)\right\}_{s\to s+3} = \left.\frac{s}{s^2+25}\right|_{s\to s+3} = \frac{s+3}{(s+3)^2+25}.$$

Observación 14.13.4. La forma recíproca del Teorema es

$$e^{at}f(t) = L^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = L^{-1}\left\{F(s)|_{s\to s-a}\right\}.$$

Ejemplo 14.13.9. *Calcule* $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$.

Solución.

En primer lugar debemos llevar el denominador de la expresión $\frac{s}{s^2+4s+5}$ a una suma o diferencia de cuadrados; como $s^2+4s+5 = (s^2+4s+4)+1$, es decir, $(s+2)^2+1$ entonces

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\},$$

ahora debemos usar las expresiones básicas conocidas de la transformada inversa, tenemos,

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+1}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{2}{(s+2)^2+1}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\left.\frac{s}{s^2+1}\right|_{s\to s-(-2)}\right\} - 2L^{-1}\left\{\left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s\to s-(-2)}\right\} \\
&= e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\sin(t).
\end{aligned}$$

14.13.6. Transformada de Derivadas

Lo que deseamos es usar la transformada de Laplace para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales, para ello necesitamos calcular expresiones como $L\left\{\frac{dy}{dt}\right\}$, $L\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}$, etc. Veamos estos dos casos y luego lo extendemos a derivadas de mayor orden.

Consideremos la función $y = f(t)$ entonces,

$$L\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt,$$

calculando por integración por partes tenemos

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = f'(t)dt \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} du = -se^{-st} \\ v = f(t) \end{cases}$$

así

$$\int e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t) + s \int e^{-st} f(t)dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt &= \left(e^{-st} f(t)\right)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= -f(0) + sL\{f(t)\} \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} L\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \\ &= L\left\{(f'(t))'\right\} \\ &= sL\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Extendiendo esta fórmula tenemos

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

donde $F(s) = L\{f(t)\}$ y $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son funciones continuas para $t \geq 0$.

14.13.7. Aplicación de la Transformada de Laplace a una ecuación diferencial con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = g(t)$; a, b constantes, $y = f(t)$ sujeta a $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados obtenemos

$$L\{y''\} + aL\{y'\} + bL\{y\} = L\{g(t)\}$$

entonces

$$s^2L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) + asL\{f(t)\} - af(0) + bL\{f(t)\} = L\{g(t)\},$$

luego
$$\left(s^2+as+b\right)L\left\{f(t)\right\}=L\left\{g(t)\right\}+sf(0)+af(0)+f'(0),$$
de donde,
$$L\left\{f(t)\right\}=\frac{L\left\{g(t)\right\}+(a+s)f(0)+f'(0)}{s^2+as+b},$$
finalmente, al aplicar la transformada inversa obtenemos $f(t)$.

Ejemplo 14.13.10. *Resuelva la ecuación $y''-4y'+4y=t^3e^{2t}$ sujeta a $y(0)=y'(0)=0$.*

Solución.

Aplicando transformada de Laplace tenemos $L\left\{y''\right\}-4L\left\{y'\right\}+4L\left\{y\right\}=L\left\{t^3e^{2t}\right\}$, así
$$s^2F(s)-sy(0)-y'(0)-4[sF(s)-y(0)]+4F(s)=\frac{6}{(s-2)^4}$$
reemplazando las condición inicial y factorizando por $F(s)$ obtenemos
$$(s^2-4s+4)F(s)=\frac{6}{(s-2)^4},$$
de donde $(s-2)^2F(s)=\frac{6}{(s-2)^4}$, es decir, $F(s)=\frac{6}{(s-2)^6}$.

Ahora,
$$f(t)=L^{-1}\left\{\frac{6}{(s-2)^6}\right\}=6L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^6}\right\}=\frac{6}{5!}L^{-1}\left\{\left.\frac{5!}{s^6}\right|_{s\to s-2}\right\}=\frac{1}{20}t^5e^{2t}.$$

Para calcular $L\left\{t^3e^{2t}\right\}$ usamos el Teorema de Traslación, tenemos
$$L\left\{t^3e^{2t}\right\}=L\left\{t^3|_{s\to s-2}\right\}=\left.\frac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-2}=\frac{6}{(s-2)^4}.$$
Recuerde que $F(s)=L\left\{f(t)\right\}$.

Ejemplo 14.13.11. *Resuelva la ecuación $y''-6y'+9y=t$ sujeta a $y(0)=0$, $y'(0)=1$.*

Solución.

Aplicando transformada de Laplace tenemos
$$L\left\{y''\right\}-6L\left\{y'\right\}+9L\left\{y\right\}=L\left\{t\right\},$$
así
$$s^2F(s)-sy(0)-y'(0)-6[sF(s)-y(0)]+9F(s)=\frac{1}{s^2}$$
reemplazando las condición inicial y factorizando por $F(s)$ obtenemos
$$(s^2-6s+9)F(s)=\frac{1}{s^2}+1,$$

es decir, $(s-3)^2F(s)=\frac{1+s^2}{s^2}$, de donde,

$$F(s)=\frac{1+s^2}{s^2(s-3)^2}.$$

Debemos separar en fracciones parciales, tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{1+s^2}{s^2(s-3)^2} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{(s-3)^2}\\ &= \frac{\frac{2}{27}}{s}+\frac{\frac{1}{9}}{s^2}+\frac{-\frac{2}{27}}{s-3}+\frac{\frac{10}{9}}{(s-3)^2},\end{aligned}$$

de donde

$$F(s)=\frac{\frac{2}{27}}{s}+\frac{\frac{1}{9}}{s^2}+\frac{-\frac{2}{27}}{s-3}+\frac{\frac{10}{9}}{(s-3)^2},$$

así, aplicando la transformada inversa obtenemos

$$f(t)=\frac{2}{27}-\frac{1}{9}t-\frac{2}{27}e^{3t}+\frac{10}{9}te^{3t}.$$

14.14. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 14.1. Para que valores del número real m, la función $y=e^{mx}$ es solución de la ecuación diferencial $y''-5y'+6y=0$?. Resp. $m=2$, $m=3$.

Ejercicio 14.2. Determine a y b para que

a) $y(x)=ae^{2x}+be^x+2\sin(x)$ satisfaga la ecuación con condición inicial $y(0)=0$, $y'(0)=0$. Resp. $a=-2$, $b=2$.

b) $y(x)=a\sin(x)+b\cos(x)+1$ satisfaga la ecuación con condición inicial $y(\pi)=0$, $y'(\pi)=0$. Resp. $a=0$, $b=1$.

Ejercicio 14.3. Verifique que la función dada en forma implícita por $y+\sin(y)=x$ es solución de la ecuación $(y\cos(y)-\sin(y)+x)y'=y$.

Ejercicio 14.4. Verifique que la función $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ es solución de la ecuación $y'=2xy+1$.

Ejercicio 14.5. Obtenga la función $y=f(x)$ si $\frac{dy}{dx}=u$, donde $\frac{du}{dx}=5x^{-3}+2$, si además se sabe que $(1,-3)\in f$, $(2,0)\in u$.

Ejercicio 14.6. Por integración inmediata determine una función $y = y(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales declaradas.

a) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$; $y(0) = 3$. Resp. $y = x^2 + x + 3$.

b) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$; $y(4) = 0$. Resp. $y = \frac{2x^{\frac{3}{2}} - 16}{3}$.

c) $\frac{dy}{dx} = (x + 2)^{-\frac{1}{2}}$; $y(2) = -1$. Resp. $y = 2\sqrt{x + 2} - 5$.

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{x^2+1}$; $y(0) = 0$. Resp. $y = 10 \arctan(x)$.

e) $\frac{dy}{dx} = xe^x$; $y(1) = 3$. Resp. $y = xe^x - e^x + 3$.

f) $(x + 1)(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x$. Resp. $y = \frac{1}{4}\ln(x + 1)^2(x^2 + 1)^3 - \frac{1}{2}\arctan(x) + 1$.

Ejercicio 14.7. Resuelva las siguientes ecuaciones de variables separables.

a) $y' + 2xy = 0$. Resp. $y = Ce^{-x^2}$.

b) $dy = y \sin(x)dx$. Resp. $y = Ce^{-\cos(x)}$.

c) $2\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$. Resp. $y = \sin(C + \sqrt{x})$.

d) $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = 2y$. Resp. $y = \frac{C(1+x)}{1-x}$.

e) $y^3\frac{dy}{dx} = (y^4 + 1)\cos(x)$. Resp. $\ln(y^4 + 1) = C + 4\sin(x)$.

Ejercicio 14.8. Resuelva las siguientes ecuaciones homogéneas.

a) $(x + y)dx + xdy = 0$. Resp. $x^2 + 2xy = C$.

b) $xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0$. Resp. $y = x\sqrt[3]{3\ln(Cx)}$.

c) $y' = \frac{y+x}{x}$. Resp. $y = x\ln(Cx)$.

d) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$. Resp. $\ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = C$.

e) $y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$. Resp. $y^4 = Cx^8 - x^4$.

Ejercicio 14.9. Integre las siguientes ecuaciones lineales.

a) $\frac{dy}{dx} - \frac{n}{x}y = e^x x^n$. Resp. $y = e^x x^n + Cx^n$.

b) $y' + y = \sin(x)$; $y(\pi) = 1$. Resp. $y = \frac{1}{2}(e^{\pi-x} + \sin(x) - \cos(x))$.

c) $\frac{dy}{dx} - 7y = \sin(2x)$. Resp. $y = Ce^{7x} - \frac{2}{53}\cos(2x) - \frac{7}{53}\sin(2x)$.

Ejercicio 14.10. Resuelva la ecuación $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$.

Ejercicio 14.11. Pruebe que el cambio de variable $z = ax + by + c$ transforma la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ en una ecuación de variables separables y aplique este método para resolver

a) $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$. Resp. $x + y = \tan(x + C)$.

b) $\frac{dy}{dx} = \sin^2(x - y + 1)$. Resp. $\tan(x - y + 1) = x + C$.

Ejercicio 14.12. Resuelva la ecuación diferencial $xdy + (xy + 2y - 2e^{-x})dx = 0$ sujeta a la condición inicial $y(1) = 0$. Resp. $y = e^{-x} - \frac{1}{x^2 e^x}$.

Ejercicio 14.13. Si y_1 es una solución particular de la ecuación diferencial $y' + p(x)y = q(x)$, demuestre que la solución general de la ecuación es $y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx}$.

Ejercicio 14.14. Pruebe que la ecuación diferencial $y' + a(x)y = b(x)y\ln(y)$ puede resolverse mediante el cambio de variable $z = \ln(y)$. Aplique este método para resolver la siguiente ecuación, $xy' = 2x^2y + y\ln(y)$. Resp. $\ln(y) = 2x^2 + Cx$.

Ejercicio 14.15. Resuelva la ecuación diferencial lineal sujeta a la condición inicial dada. $\frac{dT}{dt} = k(T - 50)$ donde k es una constante y $T(0) = 200$. Resp. $T(t) = 150e^{kt} + 50$.

Ejercicio 14.16. Integre $3x\frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^3}{y^2}$. Resp. $y^3 = x^3 + Cx^2$.

Ejercicio 14.17. Muestre que la ecuación no separable $(x+y+1)dx+(2x+2y+3)dy = 0$ se puede transformar en separable haciendo el cambio de variable $x + y = t$, resolviéndola. Resp. $x + y - \ln(x + y + 2) = -y + C$.

Ejercicio 14.18. Resuelva $\frac{dy}{dx} = \frac{2(2y^2+2xy-x^2)}{3x(y+x)}$; $y(1) = 2$. Resp. $x^4 = (x - 2)^2(2x + y)$.

Ejercicio 14.19. Si $ae \neq bd$ muestre que se puede elegir las constantes h y k de modo que la sustitución $x = z - h$, $y = w - k$ reduce la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ a una ecuación diferencial homogénea.

Aplique esto para resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-4}{x-y-6}$ ($h = -1$, $k = 5$).

Ejercicio 14.20. Resuelva $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\sin(y) - x\tan(y)} = 0$.

Ejercicio 14.21. Resuelva las siguientes ecuaciones de Bernoulli.

a) $(1 + x^2)y' - xy - axy^2 = 0$. Resp. $(C\sqrt{1 + x^2} - a)y = 1$.

b) $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$. Resp. $a^2y^3 = Ce^{ax} - a(x+1) - 1$.

c) $y - y'\cos(x) = y^2\cos(x)(1-\sin(x))$. Resp. $y = \frac{\tan(x)+\sec(x)}{\sin(x)+C}$.

Ejercicio 14.22. Demuestre que la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$, $P(x) \neq 0$ (ecuación de Ricatti) se convierte en una ecuación lineal con la transformación $y = y_1 + \frac{1}{u}$, y_1 solución particular.

Ejercicio 14.23. Usando Ejercicio 14.22 resuelva

a) $y' + \frac{y^2}{x^2-x^3} + y\frac{x-2}{x-x^2} = 0$, $y_1(x) = 0$.

b) $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, $y_1(x) = x$.

Ejercicio 14.24. Usando factor integrante resuelva.

a) $ydx + (x + x^2y)dy = 0$. Resp. $-\frac{1}{xy} + \ln(y) = C$.

b) $(xy^2 + y)dx + (x - 3x^2)dy = 0$. Resp. $\ln(x) + \frac{3}{y} - \frac{1}{xy} = C$.

c) $(4+y)dx - (x + 3x^2)dy = 0$. Resp. $\frac{4}{x} + 3y + \frac{y}{x} = C$.

Ejercicio 14.25. Resuelva las siguientes ecuaciones.

a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$. Resp. $\frac{x^3}{3} + yx - y^2 = C$.

b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$. Resp. $2y^2 - xy + x^3 = C$.

c) $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy = 0$. Resp. $\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{xy}{x-y} = C$.

Ejercicio 14.26. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = \frac{\ln(x)}{x}$, use $u = e^{2y}$. Resp. $x^2e^{2y} = 2x\ln(x) - 2x + C$.

b) $ydx + (1 + ye^x)dy = 0$, use $v = ye^x$. Resp. $e^{-x} = y\ln(y) + Cy$.

c) $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = 2x^5e^{\frac{y}{x^4}}$, use $v = e^{\frac{y}{x^4}}$. Resp. $-e^{-\frac{y}{x^4}} = x^2 + C$.

Ejercicio 14.27. Escriba una ecuación diferencial, en forma $y' = f(x,y)$, para cada uno de los siguientes enunciados.

a) La pendiente de la gráfica de la función f en el punto (x,y) es la suma de x e y. Resp. $y' = x + y$

b) La recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto (x, y) intercepta al eje X en el punto $\left(\frac{x}{2}, 0\right)$. Resp. $y' = \frac{2y}{x}$.

c) Toda línea recta perpendicular a la gráfica de $y = f(x)$ pasa por el punto $(0, 1)$. Resp. $y' = \frac{x}{1-y}$.

Ejercicio 14.28. Un pastel se retira de un horno a $210°F$ y se deja enfriar a la temperatura ambiente constante de $70°F$. Después de 30 minutos la temperatura del pastel es de $140°F$. ¿Cuándo estará a $100°F$?. Resp. 66 minutos, 40 segundos.

Ejercicio 14.29. Cierta ciudad tenía una población de 25000 habitantes en 1970 y una población de 30000 habitantes en 1980. Suponiendo que su población continúa creciendo exponencialmente con una tasa constante. ¿Qué población pueden esperar los urbanistas que tenga la ciudad el año 2010?. Resp. Aproximadamente 51840 habitantes.

Ejercicio 14.30. La fisión nuclear produce neutrones en una pila atómica a un ritmo proporcional al número de neutrones presentes en cada momento. Si hay n_0 neutrones inicialmente y hay n_1 y n_2, respectivamente, en los instantes t_1 y t_2, demuestre que $\left(\frac{n_1}{n_0}\right)^{t_2} = \left(\frac{n_2}{n_0}\right)^{t_1}$.

Ejercicio 14.31. Exprese mediante una ecuación diferencial el hecho que en cada punto (x, y) de una curva de ecuación $y = f(x)$, la recta tangente corta a los ejes coordenados de modo que la suma de tales intersecciones es una constante C.
Resp. $x(y')^2 + (C - c - y)y' + y = 0$.

Ejercicio 14.32. El moho crece a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Inicialmente había 2 gramos, en dos días ha pasado a haber 3 gramos.

a) Si $x = x(t)$ es la masa de moho en el instante t, pruebe que $x(t) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$.

b) Calcule al cantidad al cabo de diez días. Resp. 15, 2 gramos.

Ejercicio 14.33. El uranio 238 se desintegra a un ritmo proporcional a la cantidad presente. Si hay x_1 y x_2 en los instantes t_1 y t_2 respectivamente, pruebe que la semivida es $\frac{(t_2-t_1)\ln(2)}{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}$.

Ejercicio 14.34. Un magnate posee una fortuna que crece a un ritmo proporcional al cuadrado de su valor en cada momento. Si tenía 10 millones de dólares hace un año y hoy tiene 20 millones, ¿cuál será su fortuna dentro de 6 meses?. Resp. 40 millones.

Ejercicio 14.35. Si la mitad de cierta cantidad de radio se desintegra en 1600 años, ¿qué porcentaje de la cantidad inicial quedará al cabo de 2400 años. Resp. $35,35\,\%$.

Ejercicio 14.36. Un cuerpo de temperatura desconocida se coloca en un refrigerador que se mantiene a una temperatura constante de $0°C$. Tras 15 minutos el cuerpo está a $30°C$ y después de 30 minutos ya está a $15°C$. ¿Cuál era su temperatura inicial?. Resp. $60°C$.

Ejercicio 14.37. Inicialmente había 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Después de 6 horas la masa disminuye en $3\,\%$. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualquiera, proporcional a la cantidad presente de sustancia en dicho instante, encuentre la cantidad que queda después de 24 horas. ¿Cuál es la vida media de la sustancia?. Resp. $136,5$ horas.

Ejercicio 14.38. Un tanque contiene 200 litros de fluido en los cuales se disuelven 30 gramos de sal. Una salmuera que contiene un gramo de sal por litro se bombea dentro del tanque con una rapidez de 4 litros por minuto; la solución adecuadamente mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez. Encuentre el número $N(t)$ de sal que hay en el tanque en un instante cualquiera. Resp. $N(t) = 200 - 170e^{-\frac{1}{50t}}$.

Ejercicio 14.39. La ecuación diferencial que rige la velocidad v de un cuerpo de masa w que cae sometido una resistencia del aire proporcional a la velocidad instantánea es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Resuelva la ecuación sujeta a la condición inicial $v(0) = v_0$ y determine la velocidad límite.

Si la distancia s se relaciona con la velocidad instantánea mediante $\frac{ds}{dt} = v$, encuentre una expresión explícita para s si además se sabe que $s(0) = s_0$.
Resp. $v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}}$; $s(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{m}{k}\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) + s_0$.

Ejercicio 14.40. Halle las trayectorias ortogonales de la familia de curvas de ecuación $y = \frac{Cx}{1+x}$. Resp. $3y^2 + 3x^2 + x^3 = C$.

Ejercicio 14.41. Determine la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas de ecuación $4y + x^2 + 1 + Ce^{2y} = 0$. Resp. $y = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{C}{x^4}$.

Ejercicio 14.42. Encuentre un miembro de la familia de trayectorias ortogonales de $x + y = Ce^y$ que pasa por el punto $(0, 5)$. Resp. $y = 2 - x + 3e^{-x}$.

Ejercicio 14.43. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $yy'' = (y')^2$. Resp. $y = Ke^{C_1 x}$.

b) $yy'' + (y')^2 = yy'$. Resp. $y = \sqrt{C + Ke^x}$.

c) $xy'' = y' + (y')^3$. Resp. $x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2$.

d) $y'' = 2y(y')^2$. Resp. $y^3 + 3x + C_1 y + C_2 = 0$.

Ejercicio 14.44. A continuación se entrega una ecuación diferencial y una solución $y_1(x)$, determine la otra solución.

a) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$. Resp. $y_2 = xe^{2x}$.

b) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{\frac{2}{3}x}$. Resp. $y_2 = xe^{\frac{2}{3}x}$.

c) $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$, $y_1 = x + 1$. Resp. $y_2 = x^2 + 2x + 2$.

d) $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y_1 = x^2 + x^3$. Resp. $y_2 = x^2$.

e) $(3x + 1)y'' - (9x + 6)y' + 9y = 0$, $y_1 = e^{3x}$. Resp. $y_2 = 3x + 2$.

Ejercicio 14.45. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales,

a) $y'' - 16y = 0$. Resp. $C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x}$.

b) $y'' - 4y' + 5y = 0$. Resp. $y = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$.

c) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$. Resp. $y = C_1 + C_2 e^{5x} + C_3 e^{-x}$.

d) $y''' - 5y'' + 5y' + 9y = 0$. Resp. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 xe^{3x}$.

e) $y''' + y'' - 2y = 0$. Resp. $y = C_1 e^x + e^x(C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x))$.

f) $\frac{d^5y}{dx^5} - 16\frac{dy}{dx} = 0$. Resp. $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos(2x) + C_5 \sin(2x)$.

Ejercicio 14.46. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales sujeta a las condiciones iniciales dadas.

a) $y'' + 16y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$. Resp. $y = 2\cos(4x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$.

b) $y'' + 6y' + 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. Resp. $y = -\frac{3}{4}e^{-5x} + \frac{3}{4}e^{-x}$.

c) $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$. Resp. $y = 2 - 2e^x + 2xe^x - \frac{1}{2}x^2 e^x$.

Ejercicio 14.47. Calcule las siguientes transformadas inversas

a) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$. Resp. $\frac{1}{2}t^2$.

b) $L^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$. Resp. $\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$.

c) $L^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$. Resp. $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

d) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-16}\right\}$. Resp. $\frac{1}{4}\sinh(4t)$.

e) $L^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$. Resp. $2\cos(3t) - 2\sin(3t)$.

f) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}\right\}$. Resp. $t - 1 + e^{2t}$.

g) $L^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$. Resp. $1 + 3t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^3$.

h) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+3s}\right\}$. Resp. $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$.

Ejercicio 14.48. Usando el Primer Teorema de Traslación, calcule

a) $L\left\{te^{10t}\right\}$. Resp. $\frac{1}{(s-10)^2}$.

b) $L\left\{e^t\sin(3t)\right\}$. Resp. $\frac{3}{(s-1)^2+9}$.

c) $L\left\{t^3e^{-2t}\right\}$. Resp. $\frac{6}{(s+2)^4}$.

d) $L\left\{e^{5t}\sinh(3t)\right\}$. Resp. $\frac{3}{(s-5)^2-9}$.

e) $L\left\{t\left(e^t + e^{2t}\right)^2\right\}$. Resp. $\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{2}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-4)^2}$.

f) $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}$. Resp. $\frac{1}{2}e^{-2t}t^2$.

g) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-6s+10}\right\}$. Resp. $e^{3t}\sin(t)$.

h) $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$. Resp. $e^{-2t}\cos(t) - 2e^{2t}\sin(t)$.

i) $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}$. Resp. $e^{-t} - te^{-t}$.

j) $L^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$. Resp. $5 - t - 5e^{-t} - 4te^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t}$.

Ejercicio 14.49. Usando la Transformada de Laplace, resuelva

a) $\frac{dy}{dt} - y = 1$; $y(0) = 0$. Resp. $-1 + e^t$.

b) $\frac{dy}{dt} + 4y = e^{-4t}$; $y(0) = 2$. Resp. $te^{-4t} + 2e^{-4t}$.

c) $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = t^3e^{2t}$; $y(0) = y'(0) = 0$. Resp. $\frac{1}{20}t^5e^{2t}$.

d) $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

e) $y^{(3)} + y^{(2)} - 6y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = y''(0) = 1$. Resp. $\frac{1}{15}(6e^{2t} - 5 - e^{-3t})$.

f) $2\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 2y = e^{-t}$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.
Resp. $-\frac{8}{9}e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{9}e^{-2t} + \frac{5}{18}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$.

g) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 4te^t$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.
Resp. $(t-2)e^t + (t+1)\sin(t) + 2\cos(t)$.