ÍNDICE

CAPÍTULO 12
ESPACIOS VECTORIALES

12.1. DEFINICIÓN DE ESPACIO VECTORIAL

Definición 12.1.1. Sea K un cuerpo y V un conjunto, decimos que la cuaterna $(V, +, \cdot, K)$ es un espacio vectorial si se cumple

a) $\forall\, v, w \in V : v + w \in V$; Ley de composición Interna.

b) $v + (w + r) = (v + w) + r$; $\forall\, v, w, r \in V$; Asociatividad de la Suma.

c) $\exists\, 0 \in V$ tal que $v + 0 = 0 + v = v$; $\forall\, v \in V$; Elemento Neutro 0.

d) $\forall\, v \in V\ \exists - v \in V$ tal que $v + (-v) = -v + v = 0$; Elemento Opuesto $-v$.

e) $v + w = w + v$; $\forall\, v, w \in V$; Conmutatividad de la Suma.

f) $\forall\, v \in V$, $\forall\, k \in K$ se cumple $k \cdot v \in V$; Ley de composición externa.

g) $k \cdot (v + w) = k \cdot v + k \cdot w$; $\forall\, v, w \in V, \forall\, k \in K$.

h) $(k_1 + k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$; $\forall\, v \in V$, $\forall\, k_1, k_2 \in K$.

i) $(k_1 k_2) \cdot v = k_1(k_2 \cdot v)\ \forall\, v \in V$, $\forall\, k_1, k_2 \in K$.

j) $1 \cdot v = v$; $\forall\, v \in V$; $1 \in K$.

Observación 12.1.1.

1. A los elementos de V se les llama, genéricamente, "vectores" y a los elementos de K se les llama "escalares".

2. En general anotamos kv en lugar de $k \cdot v$. Esta es la ponderación de un vector por un escalar y no constituye una multiplicación.

3. Al referirnos a la cuaterna $(V, +, \cdot, K)$ también anotaremos V_K.

Proposición 12.1.1. *Sea V_K un espacio vectorial sobre el cuerpo K; se cumple*

a) *Los vectores 0 y $-v$, cuya existencia garantiza c) y d) de la definición, son únicos.*

b) *La ponderación del vector nulo por cualquier escalar produce el vector nulo.*

c) *La ponderación de cualquier vector por el escalar nulo produce el vector nulo.*

d) $(-k)v = k(-v) = -(kv);\ \forall\, v \in V,\ \forall\, k \in K.$

Demostración.

c) Como $0v = (0+0)v = 0v + 0v$ y dado que existe el vector opuesto $-(0v)$ entonces, sumando este opuesto a la expresión $0v = 0v + 0v$ obtenemos $-(0v) + 0v = -(0v) + [0v + 0v]$ de donde $0 = [-(0v) + 0v] + 0v$, así, $0 = 0_v + 0_v = 0_v$.

$\square$

Ejemplo 12.1.1.

1. *El conjunto de las matrices $M(n\mathbb{R})$ con las operaciones usuales es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.*

2. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ *es un espacio vectorial (las operaciones usuales están declaradas por omisión).*

3. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ *con las operaciones* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ *y* $k(a, b) = (a, kb)$ *no es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *ya que, por ejemplo,* $(2 + 3)(1, 2) = 5(1, 2) = (1, 10)$ *y sin embargo* $2(1, 2) + 3(1, 2) = (1, 4) + (1, 6) = (2, 10)$.

12.2. SUBESPACIO VECTORIAL

Definición 12.2.1. Sea V_K un espacio vectorial sobre K y $\Phi \neq A \subseteq V$. Decimos que A es un subespacio vectorial de V, lo que denotamos $A \triangleleft V$, si el conjunto A provisto de las operaciones del espacio vectorial es, en si mismo, un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Observación 12.2.1. Demostrar que un subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio implica, hasta el momento, verificar que se cumplen las diez "características" deseables; por cierto una gran tarea, sin embargo, la siguiente caracterización del concepto nos ayuda.

Caracterización

Sea V_K un espacio vectorial sobre K y $\Phi \neq A \subseteq V$, entonces

$$A \lhd V \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ 0 \in A \\ 2)\ v, w \in A \Rightarrow (v+w) \in A \\ 3)\ k \in K, v \in A \Rightarrow kv \in A \end{cases}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sabemos que $A \lhd V$ entonces, se cumple inmediatamente 1), 2) y 3).

$\Leftarrow$) Si sabemos que se cumple 1), 2) y 3) entonces debemos verificar que se cumple a), b), ... , j) de la definición.

Necesitamos demostrar sólo que $\forall\, w \in A, -w \in A$ ya que las otras, son inmediatas puesto que, si $p \in A \subseteq V$ entonces $p \in V$ y satisface las condiciones en V.

Como $A \neq \Phi$ entonces existe $w \in A \subseteq V$; en V, $(-1) \cdot w = -w$, pero por 3) de la hipótesis, $(-1) \cdot w = -w \in A$.

$\square$

Ejemplo 12.2.1.

1. *Sea V_K un espacio vectorial sobre K, entonces $V \lhd V$.*
2. $\{0\} \lhd V_K$.
3. *Sea $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ un espacio vectorial, entonces $W = \{(a,b,c) \,/\, a \in \mathbb{R}, b = c = 0\} \subseteq \mathbb{R}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.*

   En efecto

   1) $0 = (0,0,0) \in W$.
   2) *Sea $v = (a,b,c)$, $w = (p,q,r) \in W$ (así, $a \in \mathbb{R}$, $b = c = 0$; $p \in \mathbb{R}$, $q = r = 0$) entonces $v+w = (a+p, b+q, c+r) \in W$ ya que $(a+p) \in \mathbb{R}$ y $b+q = c+r = 0$.*
   3) *Si $v = (a,b,c) \in W$, $k \in \mathbb{R}$ entonces $kv = k(a,b,c) = (ka,kb,kc) \in W$ puesto que $ka \in \mathbb{R}$ y $kb = kc = 0$.*

Ejemplo 12.2.2. *Decida si W es subespacio de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ en cada uno de los siguientes casos*

a) $W = \{(a,b,c) \,/\, a = 2b,\ c \in \mathbb{R}\}$.

b) $W = \{(a,b,c) \,/\, a \leq b \leq c\}$.

c) $W = \{(a,b,c) \,/\, ab = 0\}$.

Solución.

a) Se verifica fácilmente que $W \lhd \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

b) No es subespacio ya que, por ejemplo, $v = (1,2,3) \in W$ y sin embargo $-2v = (-1,-4,-6) \notin W$.

c) No es subespacio ya que por ejemplo, $v = (0,1,3)$, $w = (1,0,7) \in W$ pero $v + w = (1,1,10) \notin W$.

Ejemplo 12.2.3. *Si W, U son subespacios vectoriales de V_K entonces $W \cap U \triangleleft V$. En efecto*

1. *Como $0 \in W$ y $0 \in U$ entonces $0 \in W \cap U$.*
2. *Sean $v, w \in W \cap U$, debemos demostrar que $(v + w) \in W \cap U$. Como $v, w \in W$ y $v, w \in U$ entonces $(v + w) \in W$ y $(v + w) \in U$, entonces $(v + w) \in W \cap U$*
3. *Ahora, sea $v \in W \cap U$, $k \in K$, debemos demostrar que $kv \in W \cap U$. Como $v \in W$ y $v \in U$, $k \in K$ entonces $kv \in W$ y $kv \in U$ entonces, por definición de intersección concluimos que $kv \in W \cap U$.*

Ejemplo 12.2.4. *Sea $W = \{p(x) = a + (a - b)x^2 + bx^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$. Demuestre que $W \triangleleft \mathbb{R}_3[x]$.*

Solución.

1) $p(x) = 0 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \in W$ ya que $p(x) = 0 + (0 - 0)x^2 + 0x^3$.

2) Si $p(x) = a+bx+cx^2+dx^3$, $q(x) = e+fx+gx^2+hx^3 \in W$ entonces $p(x)+q(x) \in W$ ya que $p(x) + q(x) = (a + e) + ((a + d) - (d + h))x^2 + (d + h)x^3$.

3) Si $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W$, $k \in K$ entonces $kp(x) \in W$ ya que $kp(x) = ka + (ka - dk)x^2 + dkx^3$.

Por 1), 2), 3) $W \triangleleft \mathbb{R}_3[x]$.

Observación 12.2.2. La caracterización de subespacio anterior, se puede expresar también como sigue

$$A \triangleleft V_K \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ 0 \in A \\ 2)\ \forall\, v, w \in A,\ \forall\, k \in K; (v + kw) \in A \end{cases}$$

En el Ejemplo ????????, la parte 2) y 3) queda:

Sean $v, w \in W \cap U$, $k \in K$, debemos demostrar que $(v+kw) \in W \cap U$. Como $v, w \in W$ y $v, w \in U$ entonces $(v + kw) \in W$ y $(v + kw) \in U$, entonces $(v + kw) \in W \cap U$.

12.3. COMBINACIONES LINEALES Y ESPACIO GENERADO

Definición 12.3.1. Sea V_K un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ entonces, si existen escalares $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ decimos que el vector v es una combinación lineal de los vectores de A.

Ejemplo 12.3.1. *Determine si el vector $v = (1, 7, -4) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores del conjunto $A = \{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ donde $v_1 = (1, 3, -2)$, $v_2 = (2, -1, -1)$.*

Solución. Para que v sea combinación lineal de los vectores del conjunto A deben existir reales k_1, k_2 tal que se cumpla $v = k_1v_1 + k_2v_2$. Consideremos $v = k_1v_1 + k_2v_2$.

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 \Rightarrow (1, 7, -4) = k_1(1, -3, 2) + k_2(2, -1, -1) \Rightarrow \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 1 \\ -3k_1 - k_2 = 7 \\ 2k_1 - k_2 = -4 \end{cases}$$

Aplicando el Teorema de Rouche obtenemos:

$$C = (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-2)}{\overset{f_{21}(3)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -5 & -6 \end{array}\right) \overset{f_{32}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{f_3(\frac{1}{4})}{\overset{f_2(\frac{1}{5})}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es claro que el sistema no tiene solución y entonces v no es combinación lineal de v_1, v_2.

Definición 12.3.2. Sea V_K un espacio vectorial sobre K y $\phi \neq A \subseteq V$, al conjunto $L(A)$ formado por todas las combinaciones lineales de vectores de A lo llamamos conjunto generado por A y lo denotamos también $\langle A \rangle$.

Proposición 12.3.1. *Sea V_K un espacio vectorial sobre K y $\phi \neq A \subseteq V$, entonces $\langle A \rangle \triangleleft V_K$.*

Demostración. Sea $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, entonces

1) $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$, así, $0 \in \langle A \rangle$.
2) Si $v, w \in \langle A \rangle$ y $k \in K$, debemos demostrar que $(v + kw) \in \langle A \rangle$.
   Como $v \in \langle A \rangle$ entonces $v = \sum_{i=1}^{n} k_iv_i$, como $w \in \langle A \rangle$ entonces $w = \sum_{i=1}^{n} p_iv_i$, de donde $(v + kw) = \sum_{i=1}^{n}(k_i + kp_i)v_i \in \langle A \rangle$.
   A $\langle A \rangle$ lo llamamos "subespacio generado por A".

□

Ejemplo 12.3.2. *Considere $A = \{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}$ donde $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 2, 2)$. Determine si los siguientes vectores pertenecen a $\langle A \rangle$.*

a) $v = (4, 4, 0, 7)$ *b)* $w = (2, 1, 0, 3)$ *c)* $r = (-2, 6, -8, -8)$ *d)* $s = (4, 4, 0, 0)$
e) $u = (4, 11, 7, 7)$ *f)* $t = (-1, 4, 5, 5)$ *g)* $x = (4, 5, 0, 7)$ *h)* $y = (5, -2, 7, 7)$

Solución.

Naturalmente que resulta largo realizar la verificación vector a vector, en su reemplazo determinemos una expresión funcional que cumplan los vectores que pertenecen a $\langle A \rangle$.

Sea $(a, b, c, d) \in \langle A \rangle$ entonces, $(a, b, c, d) = k_1(1, 2, 1, 1) + k_2(-1, 1, 2, 2)$, de aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1 - k_2 = a \\ 2k_1 + k_2 = b \\ k_1 + 2k_2 = c \\ k_1 + 2k_2 = d \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $a + b = 3k_1$ de donde $k_1 = \frac{a+b}{3}$. Reemplazando k_1 en la ecuación $2k_1 + k_2 = b$ obtenemos $k_2 = \frac{b-2a}{3}$, finalmente, reemplazando k_1 y k_2 en la ecuación $k_1 + 2k_2 = c = d$ obtenemos $c = \frac{a+b}{3} + 2\frac{b-2a}{3} = b - a$. Así, $\langle A\rangle = \{(a, b, c, d) \,/\, b - a = c, c = d\}$.

Con esto podemos deducir por que $v, w, x, y \notin \langle A\rangle$ y que los otros vectores sí pertenecen al subespacio generado por A.

Ejemplo 12.3.3. *Considere* $W = \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \,/\, c = a - d, b = 0\right\} \triangleleft \mathbb{R}_3[x]$. *Determine un conjunto generador de* W.

Solución. Si $p(x) \in W$ entonces $W = \left\{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \,/\, c = a - d, b = 0\right\}$.

Si imponemos las condiciones de pertenencia a W entonces el polinomio queda $p(x) = a+(a-d)x^2+dx^3$, si reordenamos, agrupando por coeficientes obtenemos $p(x) = a(1+x^2)+ d(-x^2 + x^3)$, $a, d \in \mathbb{R}$ entonces, esto último dice que los elementos de W son combinación lineal los polinomios $1 + x^2$ y $-x^2 + x^3$, lo cual, es precisamente la definición de conjunto generador, así, un generador de W es $\left\{1 + x^2, -x^2 + x^3\right\}$.

12.4. CONJUNTOS LINEALMENTE DEPENDIENTES Y CONJUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Considere los vectores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 4)$, $v_3 = (4, 7, 10)$, es inmediato notar que $v_3 = 2v_1 + v_2$, dicho de otra forma, v_3 depende de v_1 y de v_2, por otro lado podemos escribir $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$; sin embargo, esta no es la única combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3 que producen al vector nulo, ya que también $0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = 0$; esto nos indica la siguiente definición.

Definición 12.4.1. Sea V_K un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$.

a) El conjunto A es un conjunto *linealmente dependiente* si y sólo si existe algún escalar $k_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$.

b) El conjunto A es un conjunto *linealmente independiente* si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$ implica que todos los escalares k_i son nulos y únicos.

Observación 12.4.1.

a) Un conjunto es linealmente independiente (L.I) si la única combinación lineal que forma al vector nulo es la combinación lineal trivial (sólo con escalares nulos) o, equivalentemente, si el sistema lineal homogéneo $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$ es un sistema compatible determinado.

b) Un conjunto es linealmente dependiente (L.D) si existe alguna combinación lineal no trivial que forma al vector nulo o, equivalentemente, si el sistema lineal homogéneo $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$ es un sistema compatible indeterminado.

Ejemplo 12.4.1. *Determine la dependencia o independencia lineal de los siguientes subconjuntos.*

a) $\{(6,1,1),(-2,0,0),(4,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

b) $\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,4,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Solución.

a) Considere la combinación lineal $a(6,1,1)+b(-2,0,0)+c(4,1,1) = (0,0,0)$, entonces se produce el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} 6a - 2b + 4c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

Si el sistema tiene solución única, la trivial, entonces el conjunto es linealmente independiente, en caso contrario, el conjunto es linealmente dependiente. Usando matrices tenemos

$$\begin{aligned} C = (A|B) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{f_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-1)}{\overset{f_{21}(-6)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &\overset{f_2(-\frac{1}{2})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

El conjunto es linealmente dependiente ya que el sistema tiene infinitas soluciones además de la trivial $a = b = c = 0$.

Es posible "colocar" los vectores en una matriz donde, cada vector constituye una fila; se puede demostrar que las filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a la original están asociados a vectores linealmente independientes.

Veamos la técnica con los mismos vectores.

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{21}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_1(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{31}(-4)}{\overset{f_{21}(-6)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{23}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que los 3 vectores originales forman un conjunto linealmente dependiente ya que la matriz escalonada sólo tiene dos filas no nulas, sin embargo, nos entrega más información; los dos primeros vectores forman un conjunto linealmente independiente, es decir $\{(-2,0,0),(6,1,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) Si los vectores del conjunto $\{(1,2,-1),(1,0,2),(2,4,-2)\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ los colocamos en una matriz, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{f_{31}(-2)}{\overset{f_{21}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es inmediato acepta que los tres vectores forman un conjunto linealmente dependiente, en tanto que, los dos primeros vectores son vectores linealmente independientes.

Ejemplo 12.4.2. *Si* $\{u, v, w\} \subseteq V_K$ *es L.I. demuestre que* $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ *es L.I.*

Solución.

Consideremos la combinación lineal $k_1(u+v)+k_2(u-v)+k_3(u-2v+w) = 0$, debemos demostrar que $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, únicos.

$k_1(u+v)+k_2(u-v)+k_3(u-2v+w) = 0 \Rightarrow (k_1+k_2+k_3)u+(k_1-k_2-2k_3)v+k_3w = 0$, de donde se deduce el sistema

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema encontramos la solución única $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, así, $\{u+v, u-v, u-2v+w\}$ es L.I.

Ejemplo 12.4.3. *Demuestre que toda combinación lineal de vectores L.I. es única.*

Solución.

Sea $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V_K$ y $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$, debemos demostrar que v es único.

Supongamos que $v = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$, entonces $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$, así, $\sum_{i=1}^{n}(p_i-k_i)v_i = 0$ y, como A es un conjunto L.I. entonces $p_i - k_i = 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, luego la combinación es única.

Ejemplo 12.4.4. *Sea* V_K *un espacio vectorial y* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$, *entonces*

a) S *es L.D.* $\Leftrightarrow$ *algún vector de* S *es combinación lineal de los restantes vectores.*

b) *Si algún vector de* S *es el vector nulo entonces* S *es L.D.*

c) *Si* S *es L.I. y* $S_1 \subseteq S$ *entonces* S_1 *es L.I.*

d) *Si* $S_1 \subseteq S$ *y* S_1 *es L.D. entonces* S *es L.D.*

Solución.

a) $\Rightarrow$) Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es L.D. entonces algún escalar es distinto de cero en la ecuación $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$. Supongamos que $k_p \neq 0$ para algún $p = 1, 2, \ldots, n$, entonces podemos despejar v_p y obtenemos

$$v_p = -\frac{k_1}{k_p}v_1 - \cdots - \frac{k_{p-1}}{k_p}v_{p-1} - \frac{k_{p+1}}{k_p}v_{p+1} - \cdots - \frac{k_n}{k_p}v_n.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que el vector v_p es combinación lineal de los restantes vectores de S entonces $v_p = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{p-1}v_{p-1} + a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n$, de esto último obtenemos

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{p-1}v_{p-1} + (-1)v_p + a_{p+1}v_{p+1} + \cdots + a_nv_n = 0,$$

por lo tanto el conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es L.D. ya que $a_p = -1 \neq 0$.

b) Supongamos que $v_p = 0 \Rightarrow 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_{p-1} + 3v_p + 0v_{p+1} + \cdots + 0v_n = 0$, así, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es L.D.

c) Sea $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subseteq S$ y consideremos la combinación lineal $a_1v_1 + \cdots + a_pv_p = 0$, debemos demostrar que la ecuación tiene solución única $a_1 = \cdots = a_p = 0$. Si agregamos $n-p$ ceros tenemos $a_1v_1 + \cdots + a_pv_p + 0v_{p+1} + \cdots + 0v_n = 0$; como ésta ultima combinación lineal es de vectores linealmente independientes entonces $a_1 = \cdots = a_p = 0$, únicos, de donde S_1 es un conjunto linealmente independiente.

d) Sea $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subseteq S$. Si S_1 es linealmente dependiente entonces, en la combinación lineal $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_pv_p = 0$ existe algún escalar no nulo. Si agregamos "ceros" a la combinación precedente entonces $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_pv_p + 0v_{p+1} + \cdots + 0v_n = 0$ y se mantiene la existencia de un escalar no nulo, así entonces, S es linealmente dependiente.

12.5. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Definición 12.5.1. Sea V_K un espacio vectorial. Decimos que el conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V si y sólo si

a) $\langle B\rangle = V$.

b) B es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo 12.5.1. *Verifique que*

1) $E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ *es base de* $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ *(base canónica).*

2) $B = \{v_1 = (1,5), v_2 = (0,3)\}$ *es base de* $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

Solución.

1) Debemos demostrar que: a) $\langle E\rangle = \mathbb{R}^2$, b) E es linealmente independiente.

   a) Sea $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$; es inmediato concluir que $v = (x,y) = xE_1 + yE_2$, así, $\langle E\rangle = \mathbb{R}^2$.

   b) Para probar que E es linealmente independiente basta con usar la expresión matricial $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, lo que indica, inmediatamente, que E es linealmente independiente.

   Por a) y b) concluimos que E es una base de $\mathbb{R}^2$.

2) Debemos demostrar que a) $\langle B\rangle = \mathbb{R}^2$, b) B es linealmente independiente.

   a) Sea $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, queremos determinar $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y) = k_1(1,5) + k_2(0,3)$. El sistema lineal que se produce es

$$\begin{cases} k_1 = x \\ 5k_1 + 3k_2 = y \end{cases}$$

   Es cómodo concluir que $k_1 = x$, $k_2 = \frac{y-5x}{3}$; así, $(x,y) = x(1,5) + \frac{y-5x}{3}(0,3)$.

b) Como $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ está escalonado entonces $B = \{v_1 = (1,5), v_2 = (0,3)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo 12.5.2. *Sea V_K un espacio vectorial. Si $A = \{a,b,c\} \subseteq V_K$ es base de V demuestre que $N = \{a+b+c, a, a+c\}$ también es base de V.*

Solución. Consideremos la combinación lineal $A(a+b+c)+Ba+C(a+c) = 0$, debemos demostrar que la solución única es $A = B = C = 0$.

Dicha combinación lineal podemos escribirla como $a(A+B+C)+bA+c(A+C) = 0$ y dado que el conjunto $\{a,b,c\}$ es linealmente independiente, deducimos el sistema

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ A = 0 \\ A+C = 0 \end{cases}$$

éste sistema tiene solución única $A = B = C = 0$ por lo tanto, N es un conjunto linealmente independiente.

Veamos ahora que $\langle N \rangle = V$. Basta con demostrar que: si $v \in V$ entonces $v \in N$.

Si $v \in V$ entonces existen escalares $k_1, k_2, k_3 \in K$ tal que $v = k_1 a + k_2 b + k_3 c$; como queremos mostrar que existen escalares $p_1, p_2, p_3 \in K$ tal que $v = p_1(a+b) + p_2 a + p_3(a+c)$entonces procedemos como sigue.

Sean $a+b = w_1, a = w_2, a+c = w_3$ entonces concluimos que $a = w_2, b = w_1 - w_2, c = w_3 - w_2$, reemplazando en $v = k_1 a + k_2 b + k_3 c$ obtenemos $v = k_1 w_2 + k_2(w_1 - w_2) + k_3(w_3 - w_2)$, esto último lo podemos reagrupar en términos de los w, la expresión queda $v = w_1(k_2 - k_3) + w_2(k_1 - k_2) + w_3 k_3$; es decir, $v = (k_2 - k_3)(a+b) + (k_1 - k_2)a + k_3(a+c) = p_1(a+b) + p_2 a + p_3(a+c)$.

Con algo más de teoría este problema se soluciona con más eficiencia.

Proposición 12.5.1. $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *es base de $V_K \Leftrightarrow$ todo vector de V se escribe de manera única como combinación de los elementos de B.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Como B es base de V, en particular genera a V, entonces; "todo vector de V se escribe como combinación de los elementos de V".

Debemos demostrar, ahora, la unicidad de esta expresión.

Sea $v \in V$ y escribamos v como $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ tanto como $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$; debemos demostrar que $a_i = k_i$.

Si restamos los vectores obtenemos $\sum_{i=1}^{n} (a_i - k_i) v_i = 0$, de donde, como B es un conjunto linealmente independiente, concluimos que $a_i = k_i$.

$\Leftarrow$) Como "todo vector de V se escribe como combinación lineal de los vectores de B" entonces $\langle B \rangle = V$. Veamos ahora que B es un conjunto linealmente independiente.

Consideremos la combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$; como el vector nulo también se puede escribir como $\sum_{i=1}^{n} 0 v_i = 0$ entonces, por la unicidad de la expresión obtenemos $a_i = 0$.

□

Proposición 12.5.2. *Sea V un espacio vectorial sobre K y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto máximo de elementos linealmente independientes, entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V.*

Demostración. Debemos demostrar que $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle = V$.

Sea $w \in V$ entonces $\{w, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces en la combinación lineal $x_0w + x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ existe algún escalar $x_i \neq 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Necesariamente $x_0 \neq 0$ ya que si así no es, es decir si $x_0 = 0$ entonces la combinación lineal queda $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ con algún escalar no nulo; esto último es una contradicción ya que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente. Entonces podemos despejar w de la combinación lineal $x_0w + x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$ obteniendo

$$w = -\frac{x_1}{x_0}v_1 - \frac{x_2}{x_0}v_2 - \cdots - \frac{x_n}{x_0}v_n;$$

esto indica que $w \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}\rangle$, lo que completa la demostración. □

Ejemplo 12.5.3. *Sea V_K un espacio vectorial. Si $A = \{a, b, c\} \subseteq V_K$ es base de V demuestre que $N = \{a + b + c, a, a + c\}$ también es base de V.*

Solución. Consideremos la combinación lineal $A(a+b+c)+Ba+C(a+c) = 0$, debemos demostrar que la solución única es $A = B = C = 0$.

Dicha combinación lineal podemos escribirla como $a(A + B + C) + bA + c(A + C) = 0$ y dado que el conjunto $\{a, b, c\}$ es linealmente independiente, deducimos el sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A = 0 \\ A + C = 0 \end{cases}$$

éste sistema tiene solución única $A = B = C = 0$ por lo tanto, N es un conjunto linealmente independiente; como es un conjunto máximo de vectores linealmente independientes entonces es base.

Observe que este problema ya fue solucionado anteriormente

12.6. DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Demostraremos que dos bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos y definiremos como dimensión del espacio vectorial a esa cantidad común.

Teorema 12.6.1. *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente independiente entonces $m \leq n$.*

El Teorema dice: "si V es un espacio vectorial con una base que tiene n elementos y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ es tal que $m > n$ entonces $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es un conjunto linealmente dependiente. El Teorema se demuestra usando la contrapositiva planteada.

Demostración. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V entonces

$$w_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, \tag{12.1}$$

ya que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V.

Si $a_i = 0 \; \forall \, i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $w_1 = 0$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ es L.D.

Si algún $a_1 \neq 0$, suponiendo, sin perder generalidad, que $a_1 \neq 0$ entonces de (12.1) podemos despejar v_1 obteniendo $v_1 = \frac{1}{a_1}w_1 - \frac{a_2}{a_1}v_2 - \frac{a_3}{a_1}v_3 - \ldots - \frac{a_n}{a_1}v_n$, así entonces podemos concluir que $\langle\{w_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}\rangle$ contiene a v_1 y, naturalmente a $v_2, v_3, \ldots, v_n$; deducimos que $\langle\{w_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}\rangle = V$.

Así, existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ tal que

$$w_2 = c_1w_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_nv_n. \tag{12.2}$$

Si $c_i = 0 \; \forall \, i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $w_2 = 0$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ es L.D.

Si algún $c_i \neq 0$, suponiendo que $c_2 \neq 0$, despejando v_2 de la (12.2) conseguimos

$$v_2 = \frac{1}{c_2}w_2 - \frac{c_1}{c_2}w_1 - \frac{c_3}{c_2}v_3 - \cdots - \frac{c_n}{c_2}v_n$$

y, de manera análoga obtenemos que $\langle\{w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n\}\rangle = V$.

El proceso de reemplazo de los v_i por los w_i nos lleva a concluir que $\langle\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}\rangle = V$ y como quedan todavía $w_{n+1}, w_{n+2}, \ldots, w_m \in \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ entonces $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq V$ es L.D. □

Corolario 12.6.1. *Si V_K es un espacio vectorial que tiene una base con n elementos y otra base con m elementos entonces $m = n$.*

Demostración. Sean $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ dos bases del espacio vectorial V_K entonces $m \geq n$, considerando a A como base y a B como un conjunto linealmente independiente; además, $n \geq m$, considerando a B como base y a A como un conjunto linealmente independiente; entonces $m \geq n \wedge n \geq m$, así, $m = n$. □

Definición 12.6.1. Sea V_K un espacio vectorial tal que $V \neq \{0\}$, entonces definimos la dimensión de V, denotada $\dim(V)$, como la cantidad de elementos que tiene una base del espacio. Si $V = \{0\}$ entonces $\dim(V) = 0$.

Ejemplo 12.6.1.

1) $\dim(\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}) = 2$ *ya que* $E = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ *es la base canónica de* $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$.

2) $\dim(M(2, \mathbb{R})_{\mathbb{R}}) = 4$ *ya que la base canónica para este espacio vectorial es:*

$$E = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejemplo 12.6.2. *Sea* $A = \langle\{(1, 0, -5), (0, 1, 1)\}\rangle$ *y* $B = \{(x, y, z) \,/\, x - 2y + z = 0\}$ *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$*. Determine una base para* $A \cap B$*.*

Solución. Sea $(x, y, z) \in A$ entonces $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) = a(1, 0, -5) + b(0, 1, 1)$, ésta ecuación genera el sistema

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -5a + b \end{cases}$$

Reemplazando a y b en la última ecuación obtenemos $z = -5x + y$ de donde $A = \{(x, y, z) \,/\, 5x - y + z = 0\}$.

Ahora, si $(x, y, z) \in A \cap B$ entonces el trío debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Dado que la solución del sistema es $Sol = \left\{\left(-\frac{1}{9}z, \frac{4}{9}z, z\right) \,/\, z \in \mathbb{R}\right\}$ entonces, un generador de $A \cap B$ es, por ejemplo, $\{(-1, 4, 9)\}$ que, como es un conjunto linealmente independiente nos indica que $A \cap B$ tiene dimensión 1.

12.7. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 12.1. Decida si el subconjunto del espacio vectorial dado es o no subespacio

i) $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,/\, a + b = 0\right\} \subseteq M(2, \mathbb{R})$.

ii) $B = \{(x, y, z) \,/\, z - 2y = 2\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Solución.

i) $A \lhd M(2, \mathbb{R})$ ya que

a) $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$.

b) Si
$$v = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \in A, k \in \mathbb{R}$$
entonces
$$kv + w = \begin{pmatrix} ka + e & kc + g \\ kb + f & kd + h \end{pmatrix} \in A$$
esto último dado que $(ka + e) + (kc + g) = 0$. Note que $(a + c) = (e + g) = 0$.

ii) B no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ ya que $(0, 0, 0) \notin B$.

Ejercicio 12.2. Sea $v \notin \langle\{q, w, z\}\rangle$. Demuestre que $\{v, q, w, z\} \subseteq V_K$ es linealmente independiente si $\{q, w, z\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Solución.

Considere $av + bq + cw + dz = 0$; $a, b, c, d \in K$. Debemos demostrar que la ecuación tiene solución única $a = b = c = d = 0$.

Se cumple que $a = 0$, ya que si no es así, es decir, si $a \neq 0$ entonces podríamos despejar el vector v; tendríamos $v = -\frac{b}{a}q - \frac{c}{a}w - \frac{d}{a}z$; esto nos indicaría que $v \in \langle\{q, w, z\}\rangle$ lo que es una contradicción con la hipótesis; así entonces $a = 0$.

Como $a = 0$ entonces la combinación original queda $bq + cw + dz = 0$, como el conjunto $\{q, w, z\}$ es linealmente independiente, entonces la única solución de la ecuación es $b = c = d = 0$, de donde, finalmente la única solución es $a = b = c = d = 0$.

Ejercicio 12.3. Demuestre que $A = \{(2,1,0), (0,1,2), (1,0,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ es base.

Solución. Se demuestra que $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ es equivalente fila con $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, de donde, el conjunto $A = \{(2,1,0), (0,1,2), (1,0,3)\}$ es linealmente independiente. Como además es un conjunto maximal L.I. entonces es base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 12.4. Sea

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 2a & a & a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ / \, a, c \in \mathbb{R} \right\} \lhd M(3, \mathbb{R}).$$

Determine la dimensión de A.

Solución.

$$v = \begin{pmatrix} 2a & a & a \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & a & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in A \Leftrightarrow a \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in A,$$

de donde concluimos que

$$A = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Sólo falta ver si el conjunto generador es o no linealmente independiente.

Considere la ecuación

$$a \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se deduce que la única solución de la ecuación planteada es $a = b = 0$, por tanto el conjunto es linealmente independiente. Como el conjunto es una base de A entonces $\dim(A) = 2$.

Ejercicio 12.5. Sean $A = \{(1,2,0), (0,2,1)\}$, $B = \{(2,2,-1), (1,6,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

a) Encuentre una "expresión funcional" para los elementos de $\langle A\rangle$.

b) Demuestre que $\langle A\rangle = \langle B\rangle$.

Solución.

a) Sea $(x, y, z) \in \langle A\rangle$, entonces existen escalares a, b tal que $(x, y, z) = a(1, 2, 0) + b(0, 2, 1)$, de esto deducimos el sistema

$$\begin{cases} x = a \\ y = 2a + 2b \\ z = b \end{cases}$$

La segunda ecuación del sistema, al expresarla en función de x, y, z queda $y = 2x+2z$ de donde, $\langle A\rangle = \{(x, y, z) \,/\, y = 2x + 2z;\ x, z \in \mathbb{R}\}$.

b) De manera análoga al caso a) tenemos: si $(p, q, r) \in \langle B\rangle$, entonces existen escalares a, b tales que $(p, q, r) = a(2, 2, -1) + b(1, 6, 2)$. El sistema es ahora

$$\begin{cases} p = 2a + b \\ q = 2a + 6b \\ r = -a + 2b \end{cases}$$

combinando las dos primeras ecuaciones del sistema obtenemos $5b = q - p$, luego, $b = \frac{q-p}{5}$; si esta expresión la reemplazamos en la tercera ecuación, (despejando allí la "variable a") tenemos, $a = 2b - r = \frac{2q-2p}{5} - r = \frac{2q-2p-5r}{5}$; estamos ahora en condición de encontrar una relación entre p, q, r; para ello basta con reemplazar a, b en la ecuación $q = 2a + 6b$.

La relación que se obtiene es $q = 2p+2r$; así, $\langle B\rangle = \{(p, q, r) \,/\, q = 2p + 2r;\ p, r \in \mathbb{R}\}$. Se concluye que $\langle A\rangle = \langle B\rangle$.

Ejercicio 12.6. Sea $W = \big\{p(x) = ax^2 + bx + c \,/\, 2a + c = b\big\} \subseteq \mathbb{R}_2(x)$.

a) Demuestre que W es subespacio de $\mathbb{R}_2(x)$.

b) Determine $\dim(W)$.

c) Extienda la base de W a una base de $\mathbb{R}_2(x)$.

Solución.

a)
   i) $0 = 0x^2 + 0x + 0 \in W$ ya que $2 \cdot 0 + 0 = 0$, así, $0 \in W$.

   ii) Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = dx^2 + ex + f \in W$ entonces $p(x) + q(x) \in W$ ya que $p(x) + q(x) = (a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)$ satisface la relación $2(a + d) + (c + f) = (b + e)$.

   iii) Si $p(x) = ax^2 + bx + c \in W$, $k \in K$ entonces $k \cdot p(x) = kax^2 + kbx + kc \in W$ ya que $2ka + kc = kb$.

   Por i), ii), iii) W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2(x)$.

b) Si $p(x) = ax^2+bx+c \in W$ entonces $p(x) = ax^2+(2a+c)x+c = a(x^2+2x)+b(x+1)$ así, $\langle\{x^2+2x, x+1\}\rangle = W$. Como $\{x^2+2x, x+1\}$ es linealmente independiente, entonces $\{x^2+2x, x+1\}$ es base de W y $\dim(W) = 2$.

c) Como la dimensión de $\mathbb{R}_2(x)$ es 3 entonces debemos agregar un vector a la base de W tal que los tres vectores sean linealmente independientes, tal vector, por ejemplo es el 1, así, $\{x^2+2x, x+1, 1\}$ es base de $\mathbb{R}_2(x)$.

Ejercicio 12.7. Sea $A = \langle\{(1,0,-5),(0,1,1)\}\rangle$ y $B = \{(x,y,z)\,/\,x-2y+z=0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$. Determine una base para $A \cap B$.

Solución. Sea $(x,y,z) \in A$ entonces $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y,z) = a(1,0,-5)+b(0,1,1)$, ésta ecuación genera el sistema

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -5a+b \end{cases}$$

Reemplazando a y b en la última ecuación obtenemos $z = -5x+y$ de donde $A = \{(x,y,z)\,/\,5x-y+z=0\}$.

Ahora, si $(x,y,z) \in A\cap B$ entonces el trío debe satisfacer el sistema

$$\begin{cases} 5x-y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

Dado que la solución del sistema es $Sol = \left\{\left(-\frac{1}{9}z, \frac{4}{9}z, z\right)\,/\,z \in \mathbb{R}\right\}$ entonces, un generador de $A\cap B$ es, por ejemplo, $\{(-1,4,9)\}$ que, como es un conjunto linealmente independiente nos indica que $A\cap B$ tiene dimensión 1.

12.8. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 12.1. Considere el conjunto formado por los polinomios en la indeterminada x, con grado a lo más dos, definidos en el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}_2(x)$, con la suma y ponderación usuales. Demuestre que $(\mathbb{R}_2(x), +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 12.2. Sean U y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$; si definimos $V = U\times W$ y las operaciones $(u,w)+(u',w') = (u+u', w+w')$; $k(u,w) = (ku,kw)$, $k\in\mathbb{R}$. Demuestre que V es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 12.3. Sea $\mathbb{R}^2$ y considere las siguientes operaciones: $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$; $k(a,b) = (k^2a, kb)$, $k\in\mathbb{R}$. ¿Es $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ un espacio vectorial. Justifique.

Ejercicio 12.4. Sea $V = \{(a,b)\,/\,a,b\in\mathbb{R}\}$. Demuestre que $(V,+,\cdot,\mathbb{R})$ es un espacio vectorial donde $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$; $k(a,b) = (a^k, b^k)$, $k\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 12.5. Sea $\mathbb{R}^2$ y considere las siguientes operaciones: $(a,b)+(c,d) = (a+d, b+c)$; $k(a,b) = (ka, kb)$, $k \in \mathbb{R}$. ¿Es $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ un espacio vectorial. Justifique.

Ejercicio 12.6. Sea $\mathbb{R}^2$ y considere las siguientes operaciones: $(a,b) + (c,d) = (0,0)$; $k(a,b) = (ka, kb)$, $k \in \mathbb{R}$. ¿Es $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ un espacio vectorial. Justifique.

Ejercicio 12.7. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a) $U = \{(a,b,c) \,/\, a+b+c \leq 1\}$.

b) $W = \left\{(x,y,z) \,/\, z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 0\right\}$.

c) $P = \{(x,y,z) \,/\, x + 2y = 0 \wedge y + z = 8\}$.

¿Es U, W, P subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$?. Justifique.

Ejercicio 12.8. Si $S_1 \lhd V_K$ y $S_2 \lhd V_K$ demuestre que $S_1 \cap S_2 \lhd V_K$.

Ejercicio 12.9. Determine si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ son subespacios.

a) $A = \{(x,y,z) \,/\, x = 0\}$.

b) $B = \{(x,y,z) \,/\, z - 2y = 0\}$.

c) $C = \{(x,y,z) \,/\, z - 2y = 2\}$.

d) $D = \left\{(a,b,c) \,/\, a^2 + b^2 + c^2 = 0\right\}$.

Ejercicio 12.10. Sea $V = M(2,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V?. Justifique.

a) $A = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

b) $B = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

c) $C = \{A \in V \,/\, \det(A) = 0\}$.

d) $D = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,/\, a + b = 0\right\}$.

Ejercicio 12.11. Sea $V = M(n,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V?. Justifique.

a) $A = \left\{A \in V \,/\, A = 3A^t\right\}$.

b) $A = \{A \in V \,/\, AC = CA,\ C \in V\}$.

c) $C = \{A \in V \,/\, A \text{ es simétrica}\}$.

Ejercicio 12.12. Sea $V = M(2,3,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 por 3 sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos es subespacio vectorial de V?. Justifique.

a) $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right) \,/\, c = d + f \right\}$.

b) $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \,/\, d > 0 \right\}$.

Ejercicio 12.13. Determine cual(es) de los siguientes conjuntos dados es o no un conjunto linealmente independiente.

a) $A = \{(1,1,0,1),(1,-1,1,1),(2,2,1,2),(0,1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}$.

b) $B = \{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1),(1,1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}$.

c) $C = \left\{t^3 - 4t^2 + 2t + 3, t^3 + 2t^2 - 4t + 1, 2t^3 - t^2 + 3t - 5\right\} \subseteq \mathbb{R}_3(t)$.

Ejercicio 12.14. Sea $A = \{f(t), g(t), h(t)\} \subseteq V$ donde V es el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(t)$ sobre $\mathbb{R}$, tal que $f(t) = 2t_2 + 3t + 1$, $g(t) = -t^2 + at + 2$, $h(t) = 2t^2 + 3t + a - 5$. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que A sea un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 12.15. Sea $A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$. Demuestre que A es un conjunto linealmente dependiente y que cualquier subconjunto de A con tres elementos es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 12.16. Considere el espacio vectorial V_K y $S \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente. Si $v \notin \langle S \rangle$ demuestre que $S \cup \{v\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejercicio 12.17. Demuestre que el conjunto $A = \{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\}$ forma una base para $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ y exprese cada vector de la base canónica como combinación lineal de los vectores de la base A.

Ejercicio 12.18. Si $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial V_K demuestre que $B = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3\}$ también es base del espacio.

Ejercicio 12.19. Encuentre una base del conjunto solución del sistema

$$S : \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

y determine su dimensión.

Ejercicio 12.20. Sea $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \,/\, 2a + c = b\} \subseteq \mathbb{R}_2(x)$.

a) Demuestre que W es subespacio de $\mathbb{R}_2(x)$.

b) Determine $\dim(W)$.

c) Extienda la base de W a una base de $\mathbb{R}_2(x)$.

Ejercicio 12.21. Demuestre que

$$A = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\} \qquad \text{y} \qquad B = \{(1,1,1),(1,2,0),(0,0,2)\}$$

son base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 12.22. Sea $A = \{(x,y,z) \,/\, 3x - 2y - z - 4w = 0 \wedge x + y - 2z - 3w = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Demuestre que $A \lhd \mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}$.

b) Determine una base de A.

c) Determine la dimensión de A.

Ejercicio 12.23. Demuestre que $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 2c & 2b \\ b & 2a & 2c \\ c & b & a \end{smallmatrix}\right) \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio vectorial de $M(3,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$; determine además, la dimensión de A.

Ejercicio 12.24. ¿Para qué valor(es) de $a \in \mathbb{R}$:

a) $A = \{(2,3,4),(6,7,8),(4,5-a,4)\}$ es base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$?.

b) $B = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 21 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ a+1 & 7 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ es base de $M(2,\mathbb{R})_{\mathbb{R}}$?.

Ejercicio 12.25. Sea $W = \{p(x) = a + (a-b)x^2 + bx^3\} \subseteq \mathbb{R}_3(x)$.

a) Demuestre que W es subespacio de $\mathbb{R}_3(x)$.

b) Determine $\dim(W)$.

c) Extienda la base de W a una base de $\mathbb{R}_3(x)$.

Ejercicio 12.26. Sean $U = \{(x,y,z) \,/\, x + 3y - 5z = 0\}$, $W = \{(x,y,z) \,/\, x - y + 2z = 0\}$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

a) Demuestre que $U, W \lhd \mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

b) Encuentre una base para cada subespacio.

c) Encuentre una base para $U \cap W$.

d) Extienda la base encontrada en c) a una base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 12.27. Sea $A = \{(1,2,1,1),(-1,1,2,2)\} \subseteq \mathbb{R}^4_{\mathbb{R}}$.

a) ¿$v_1 = (3,2,4,5)$, $v_2 = (1,3,2,2)$, $v_3 = (3,-3,6,6) \in \langle A \rangle$?. Justifique.

b) Encuentre una expresión funcional para los vectores que pertenecen al espacio generado por el conjunto A.

Ejercicio 12.28. Sea $A = \langle\{(1,0,-1),(0,1,2)\}\rangle$ y $B = \{(x,y,z) \,/\, 5x - y + z = 0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$. Determine una base para $A \cap B$.