ÍNDICE

13. TRANSFORMACIONES LINEALES **273**

13.1. DEFINICIÓN DE TRANSFORMACIÓN LINEAL 273
13.2. DETERMINACIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL 275
13.3. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL 276
13.4. NÚCLEO Y RECORRIDO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL . . 277
13.5. ESPACIO IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL 280
13.6. TEOREMA DE LA DIMENSIÓN 281
13.7. EJERCICIOS RESUELTOS 284
13.8. EJERCICIOS PROPUESTOS 287

CAPÍTULO 13
TRANSFORMACIONES LINEALES

13.1. DEFINICIÓN DE TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición 13.1.1. Sean $(V, +, \circ, K)$, $(W, \oplus, *, K)$ dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una aplicación o función $T : V \to W$ es una transformación lineal si

a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) \oplus T(v_2)$; $\forall\, v_1, v_2 \in V$.

b) $T(k \circ v) = k * T(v)$; $\forall\, v \in V$, $\forall\, k \in K$.

Observación 13.1.1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces:

a) Para simplificar la notación denotaremos las operaciones en los espacios con el mismo símbolo diciendo:

   $T : V \to W$ es una transformación lineal si

   a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$; $\forall\, v_1, v_2 \in V$.
   b) $T(kv) = kT(v)$; $\forall\, v \in V$, $\forall\, k \in K$.

b) T es lineal si preserva las operaciones del espacio vectorial.

c) El cero del espacio V se transforma en el cero del espacio W, es decir, $T(0_V) = 0_W$ ya que, usando b) de la Definición 13.1.1, con $k = 0$ se consigue $T(0_V) = T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v) = 0_W$.

   Usando la contrapositiva concluimos: si $T(0_v) \neq 0_W$ entonces $T : V \to W$ no es una transformación lineal.

d) $T\left(\sum\limits_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i T(v_i)$; $v_i \in V$, $k_i \in K$.

Ejemplo 13.1.1. *Verifique que la transformación* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y) = (x + y, y, x - y)$, *es una transformación lineal.*

Solución.

a) Sean $v_1 = (x, y)$, $v_2 = (p, q) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} T(v_1 + v_2) &= T(x + p, y + q) \\ &= ((x + p) + (y + q), y + q, (x + p) - (y + q)) \\ &= ((x + y) + (p + q), y + q, (x - y) + (p - q)) \\ &= (x + y, y, x - y) + (p + q, q, p - q) \\ &= T(x, y) + T(p, q) \\ &= T(v_1) + T(v_2) \end{aligned}$$

b) Sean $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} T(kv) &= T(kx, ky) \\ &= (kx + ky, ky, kx - ky) \\ &= k(x + y, y, x - y) \\ &= kT(x, y) \\ &= k(Tv) \end{aligned}$$

así, T es una transformación lineal.

Ejemplo 13.1.2. *Verifique si la transformación* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $T(x, y) = (x+y, x-y+2, y)$, *es una transformación lineal.*

Solución. Claramente T no es transformación lineal ya que $T(0, 0) = (0, 2, 0) \neq (0, 0, 0)$.

Ejemplo 13.1.3. *Compruebe que la transformación* $T : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ *tal que* $T(A) = MA+AM$ *donde* M *es una matriz fija en* $M(n, \mathbb{R})$, *es una transformación lineal.*

Solución.

a) Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned} T(A + B) &= M(A + B) + (A + B)M \\ &= (MA + MB) + (AM + BM) \\ &= (MA + AM) + (MB + BM) \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

b) Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} T(KA) &= M(kA) + (kA)M \\ &= kMA + kAM \\ &= k(MA + AM) \\ &= kT(A) \end{aligned}$$

Por a) y b), T es una transformación lineal.

13.2. DETERMINACIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Para describir una transformación o función arbitraria se debe especificar su valor en cada elemento de su dominio, sin embargo, para una transformación lineal basta con conocer los valores sobre una base del espacio dominio.

Teorema 13.2.1. *Sea* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *una base del espacio vectorial* V_K *y* W_K *otro espacio vectorial tal que* $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subseteq W$ *entonces, existe una única transformación lineal* $T : V \to W$ *donde* $T(v_1) = w_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Demostración. Encontremos una transformación lineal con las propiedades.

Si $v \in V$ entonces $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$, con a_i las componentes de v en la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Definamos entonces $T : V \to W$ por $T(v) = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n$.

Claramente T es una transformación ya que existe un único elemento en W correspondiente a cada elemento de V.

Veamos que T es una transformación lineal.

Consideremos otro vector $w \in V$ tal que $w_1 = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ entonces $v + w = (a_1 + c_1)v_1 + (a_2 + c_2)v_2 + \cdots + (a_n + c_n)v_n$, luego

$$\begin{aligned} T(v+w) &= (a_1 + c_1)w_1 + (a_2 + c_2)w_2 + \cdots + (a_n + c_n)w_n \\ &= a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n + c_1w_1 + c_2w_2 + \cdots + c_nw_n \\ &= T(v) + T(v_1). \end{aligned}$$

Además, $T(kv) = ka_1w_1 + ka_2w_2 + \cdots + ka_nw_n = kT(v)$.

Veamos ahora la unicidad de la transformación.
Sea $S : V \to W$ otra transformación lineal tal que $S(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\begin{aligned} S(v) &= S(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) \\ &= a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n \\ &= T(v) \end{aligned}$$

así, $S = T$. □

Observación 13.2.1. El conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ es arbitrario, incluso podría ser un conjunto linealmente dependiente.

Ejemplo 13.2.1. *Determine la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(1, 1) = (0, 2)$ *y* $T(3, 1) = (2, -4)$*.*

Solución. Claramente el conjunto $\{(1, 1), (3, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ ya que él es un conjunto máximo de vectores linealmente independiente.

Es L.I. ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{21}(-3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y es maximal dado que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2.

Sea $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces existen escalares a, b tal que $(x, y) = a(1, 1) + b(3, 1)$, entonces

$$\begin{cases} x = a + 3b \\ y = a + b \end{cases}$$

Debemos expresar a, b en función de x, y.

Al resolver el sistema para las variables a, b obtenemos $a = \frac{3y-x}{2}$, $b = \frac{x-y}{2}$, de donde $(x, y) = \frac{3y-x}{2}(1, 1) + \frac{x-y}{2}(3, 1)$; así, $T(x, y) = \frac{3y-x}{2}T(1, 1) + \frac{x-y}{2}T(3, 1)$, es decir, $T(x, y) = \frac{3y-x}{2}(0, 2) + \frac{x-y}{2}(2, -4) = (x - y, 5y - 3x)$.

13.3. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Estamos en condiciones de mostrar que cualquier transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$puede ser introducida mediante la multiplicación por una matriz adecuada

Teorema 13.3.1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces existe una matriz $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ tal que $T(v) = A \cdot v$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Antes de efectuar la demostración, es conveniente señalar que podemos "identificar" la n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ con la matriz columna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n, 1, \mathbb{R});$$

esto se realizará con un isomorfismo que presentaremos posteriormente.

Sea $E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $E^* = \{E_1^*, E_2^*, \dots, E_m^*\}$ base canónica de $\mathbb{R}^m$.

Sea $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces v se escribe como combinación de los vectores de E como $v = x_1E_1 + x_2E_2 + \cdots + x_nE_n$, así, aplicando la transformación lineal T obtenemos

$$T(v) = x_1T(E_1) + x_2T(E_2) + \cdots + x_nT(E_n). \tag{13.1}$$

Por otro lado, cada vector $T(E_j) \in \mathbb{R}^m$ se escribe como combinación lineal de la base canónica E^* como $T(E_j) = a_{1j}E_1^* + a_{2j}E_2^* + \cdots + a_{mj}E_m^*$.

Reemplazando esto último en (13.1) obtenemos

$$\begin{aligned} T(v) \;=\; & x_1(a_{11}E_1^* + a_{21}E_2^* + a_{31}E_3^* + \cdots + a_{m1}E_m^*) \\ & + x_2(a_{12}E_1^* + a_{22}E_2^* + \cdots + a_{32}E_3^* + \cdots + a_{m2}E_m^*) \\ & + \cdots + x_n(a_{1n}E_1^* + a_{2n}E_2^* + a_{3n}E_3^* + \cdots + a_{mn}E_m^*) \end{aligned}$$

de aquí deducimos que la i-ésima componente de $T(v)$ es $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n$.

Si definimos $A = (a_{ij}) \in M(m,n,\mathbb{R})$ entonces, dado que la i-ésima componente de

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n$, concluimos que $T(v) = A \cdot v$. $\square$

Observación 13.3.1.

1. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal entonces la matriz $A = (a_{ij}) \in M(m,n,\mathbb{R})$ que hemos construido se llama "matriz asociada a la transformación lineal T'' y la denotamos por T_A, $[T]_E$, $[T]_E^{E^*}$.
2. La matriz T_A se obtiene, colocando como columnas, los coeficientes de la combinación lineal que representa al vector $T(E_j)$ al escribirlo como combinación lineal de los vectores de la base E^*.

Ejemplo 13.3.1. *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x,y,z) = (2x + y, x + y + z)$. Determine $A = [T]_E^{E^*}$ y verifique.*

Solución.
Sean $E = \{E_1 = (1,0,0), E_2 = (0,1,0), E_3 = (0,0,1)\}$, $E^* = \{E_1^* = (1,0), E_2^* = (0,1)\}$ bases canónicas de $\mathbb{R}_{\mathbb{R}^3}$ y $\mathbb{R}_{\mathbb{R}^2}$ respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} T(E_1) &= T(1,0,0) = (2,1) = 2E_1^* + 1E_2^* \\ T(E_2) &= T(0,1,0) = (1,1) = 1E_1^* + 1E_2^* \\ T(E_3) &= T(0,0,1) = (0,1) = 0E_1^* + 1E_2^* \end{aligned}$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificación:

$$T(v) = A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y + z \end{pmatrix} = (2x + y, x + y + z).$$

13.4. NÚCLEO Y RECORRIDO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición 13.4.1. Una transformación lineal $T : V \to W$ es inyectiva o monomorfismo si, como función es inyectiva.

Observación 13.4.1. La Transformación Lineal $T : V \to W$ es un monomorfismo si y sólo si $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2,\ \forall\, v_1, v_2 \in V$.

Ejemplo 13.4.1. *Sea* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal tal que* $T(x,y) = (x+y, x-y)$. *Demuestre que* T *es un monomorfismo.*

Solución. Consideremos $T(x,y) = T(z,w)$, debemos demostrar que $(x,y) = (z,w)$.

$$\begin{aligned} T(x,y) = T(z,w) &\Rightarrow (x+y, x-y) = (z+w, z-w) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y = z+w \\ x-y = z-w \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = w \end{cases} \end{aligned}$$

Así $(x,y) = (z,w)$, y entonces, T es un monomorfismo.

Ejemplo 13.4.2. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *una transformación lineal tal que* $T(x,y,z) = (x,y)$, *notamos inmediatamente que* T *no es un monomorfismo ya que* $(3,2,1) \neq (3,2,7)$ *y sin embargo* $T(3,2,1) = T(3,2,7) = (3,2)$.

Presentaremos ahora una forma más simple para decidir si una transformación lineal es o no un monomorfismo, mirando el núcleo de la transformación.

Definición 13.4.2. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, el núcleo de T es el conjunto de vectores de V que tienen imagen nula.

Observación 13.4.2.

1. Si denotamos al núcleo de T por $Ker(T)$ entonces $Ker(T) = \{v \in V \,/\, T(v) = 0\}$.
2. $Ker(T) \neq \emptyset$ ya que $T(0_v) = 0_W$.

Teorema 13.4.1. *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal, entonces*

a) $Ker(T) \lhd V$.

b) T *es un monomorfismo si y sólo si* $Ker(T) = \{0_V\}$.

Demostración.

a) Debemos demostrar que $Ker(T)$ es un subespacio vectorial de V, es decir, debemos demostrar:

   i) $0 \in Ker(T)$.
   ii) $v_1, v_2 \in Ker(T) \Rightarrow (v_1 + v_2) \in Ker(T)$.
   iii) $k \in K, v \in Ker(T) \Rightarrow kv \in Ker(T)$.

   i) $0 \in Ker(T)$ ya que $T(0) = 0$.

ii) Debemos demostrar que $T(v_1 + v_2) = 0$. Como $v_1 \cdot v_2 \in Ker(T)$ entonces se cumple $T(v_1) = 0 = T(v_2)$, luego, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$.

iii) Para que $kv \in Ker(T)$ debemos demostrar que $T(kv) = 0$. Como $T(v) = 0$ entonces es inmediato obtener $T(kv) = kT(v) = k \cdot 0 = 0$.

Por i), ii)y iii) concluimos que $Ker(T) \lhd V$.

b) Debemos demostrar que

i) Si T es monomorfismo entonces $Ker(T) = \{0_V\}$.

ii) $Ker(T) = \{0_V\}$ entonces T es monomorfismo.

i) Sea $v \in Ker(T)$, debemos demostrar que $v = 0$.
Como $T(v) = 0_W$ y además $T(0) = 0_W$ entonces $T(v) = T(0)$ y dado que $T : V \to W$ es un monomorfismo (es decir T es inyectiva) entonces, $v = 0$.

ii) Sea $T(x) = T(y)$ debemos demostrar que $x = y$.
Si $T(x) = T(y)$ entonces $T(x) - T(y) = 0$, es decir, $T(x - y) = 0$; así, $(x - y) \in Ker(T)$, de donde $x - y = 0$ y entonces, $x = y$.

$\square$

Ejemplo 13.4.3. *Sea $T : \mathbb{R}_2(x) \to M(2, \mathbb{R})$ una transformación lineal tal que*

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a + b + c \end{pmatrix}.$$

a) Determine $\dim(Ker(T))$.

b) Extienda la base de $Ker(T)$ a una base de $\mathbb{R}_2(x)$.

Solución.

a) Sea $a + bx + cx^2 \in Ker(T)$ entonces

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de esto último deducimos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a + b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solucionando el sistema que se origina concluimos que $a = 0$, $a + b + c = 0$, así $a = 0$, $c = -b$.

Concluimos entonces que $Ker(T) = \left\{bx - bx^2 \,/\, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Como $bx - bx^2 = b(x - x^2) \in Ker(T)$, $b \in \mathbb{R}$ entonces $Ker(T) = \langle \left\{x - x^2\right\} \rangle$ de donde $\dim(Ker(T)) = 1$ ya que el conjunto formado por un único vector es linealmente independiente.

b) $\mathbb{R}_2(x)$ tiene dimensión 3, por lo tanto, a la base del $Ker(T)$ debemos agregar dos vectores tal que, los tres vectores sean linealmente independientes (maximal L.I.). Podemos agregar, por ejemplo, los vectores canónicos $1, x^2$.

Se puede verificar, rápidamente, que $\{1, x - x^2, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente (por ejemplo usando la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que está escalonada)

13.5. ESPACIO IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición 13.5.1. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, definimos la Imagen de T denotada $Im(T)$ como:

$$Im(T) = \{w \in W \,/\, \exists\, v \in V \text{ tal que } w = T(v)\}.$$

Observación 13.5.1. $Im(T) \neq \emptyset$ ya que $T(0) = 0$.

Teorema 13.5.1. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entonces $Im(T) \lhd W$.*

Demostración.

a) Claramente $0 \in Im(T)$.

b) Sean $w_1, w_2 \in Im(T)$ entonces existen $v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$, así, $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$, por lo tanto, $w_1 + w_2 \in Im(T)$.

c) Sea $w \in Im(T)$, $k \in K$, entonces existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$; como T es una Transformación Lineal entonces $T(kv) = kT(v) = kw$, de donde $kw \in Im(T)$.

□

Teorema 13.5.2. *Sea $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ la matriz asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entonces las columnas de A generan $Im(T)$.*

Demostración. Sea $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$. Si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces existen n escalares α_i tal que $v = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n$, entonces $T(v) = T(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \cdots + \alpha_n E_n)$, esta última expresión es

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1 T(E_1) + \alpha_2 T(E_2) + \cdots + \alpha_n T(E_n) \\ &= \alpha_1 (AE_1) + \alpha_2 (AE_2) + \cdots + \alpha_n (AE_n). \end{aligned}$$

Como AE_i es la i-ésima columna de A, y dado que todo elemento en $Im(T)$ es combinación lineal de $\{AE_1, AE_2, \ldots, AE_n\}$ concluimos que las columnas de A generan la imagen de T. □

Ejemplo 13.5.1. *Considere la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $T(x, y, z) = (x + y, x - y + z)$. *Determine* $\dim(Im(T))$.

Solución. Encontremos la matriz asociada a la transformación lineal y con respecto a las bases canónicas; para ello determinamos la imagen de los vectores canónicos del espacio de partida y los expresamos como combinación lineal de los vectores de la base canónica del espacio de llegada, tenemos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) \quad , \quad T(0, 1, 0) = (1, -1) \quad , \quad T(0, 0, 1) = (0, 1),$$

así, la matriz buscada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como los vectores columna de la matriz A generan la imagen de T entonces $Im(T) = \langle\{(1, 1), (1, -1), (0, 1)\}\rangle$; naturalmente que sólo dos vectores son linealmente independientes, por ejemplo, $(1, 1)$ y $(0, 1)$; por lo tanto el conjunto $\{(1, 1), (0, 1)\}$ es base de $Im(T)$ de donde $\dim(Im(T)) = 2$.

13.6. TEOREMA DE LA DIMENSIÓN

Teorema 13.6.1. *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal tal que* $\dim(V), \dim(W) < \infty$*, entonces*

$$\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)).$$

Demostración. Determinamos una base de $Ker(T)$ y una base de $Im(T)$ y postulamos que el conjunto formado por los elementos de $Ker(T)$ junto con pre-imagenes de los elementos de $Im(T)$ forman una base de V.

Sea $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ base de $Ker(T)$ y $\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$ base de $Im(T)$, entonces $\dim(Ker(T)) = n$ y $\dim(Im(T)) = m$, debemos demostrar que $\dim(V) = n + m$.

Como $w_1, w_2, \ldots, w_m \in Im(T)$ entonces existen $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ tal que $T(u_i) = w_i$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, m$.

Postulamos que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ es base de V. B es L.I., en efecto, sea

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n + c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m = 0, \tag{13.2}$$

debemos demostrar que los escalares a_i, c_j son nulos y únicos.

Aplicando la transformación lineal a la última combinación lineal obtenemos

$$a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n) + c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \cdots + c_mT(u_m) = 0, \tag{13.3}$$

pero $T(v_i) = 0, \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$, de donde (13.3) queda $c_1T(u_1)+c_2T(u_2)+\cdots+c_mT(u_m) = 0$, como $\{T(u_j) = w_j \,/\, j = 1, 2, \ldots, m\}$ es base de $Im(T)$ entonces $c_j = 0$, únicos, $\forall\, j = 1, 2, \ldots, m$.

Reemplazando esto último en (13.2) obtenemos $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$, y como $\{v_i \,/\, i = 1, 2, \ldots, n\}$ es base concluimos que $a_i = 0$, únicos, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.

$\langle B\rangle = V$, en efecto:

Sea $v \in V$ entonces, $T(v) \in Im(T)$ de donde $T(v) = d_1w_1 + d_2w_2 + \cdots + d_mw_m$, definiendo v_r como $v_r = v - d_1u_1 - d_2u_2 - \cdots - d_mu_m$ y aplicando la transformación lineal obtenemos

$$\begin{aligned} T(v_r) &= T(v) - d_1T(u_1) - d_2T(u_2) - \cdots - d_mT(u_m) \\ &= d_1w_1 + d_2w_2 + \cdots + d_mw_m - d_1w_1 + d_2w_2 + \cdots + d_mw_m \\ &= 0, \end{aligned}$$

así, $v_r \in Ker(T)$, luego este vector se escribe como combinación lineal de los vectores de la base del $Ker(T)$ obteniendo $v_r = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n$; tenemos entonces

$$\begin{aligned} v_r &= v - d_1u_1 - d_2u_2 - \cdots - d_mu_m \\ &= \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n \end{aligned}$$

de donde, al despejar v conseguimos

$$v = \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n + d_1u_1 + d_2u_2 - \cdots + d_mu_m,$$

esto último nos indica que $\langle B\rangle = V$. □

Corolario 13.6.1. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces*

1. $\dim(Im(T)) \leq \dim(V)$.

   En efecto, como $\dim(V) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) \geq \dim(Im(T))$ *entonces*

   $$\dim(Im(T)) \leq \dim(V).$$

2. *Si* $\dim(W) < \dim(V)$ *entonces* $Ker(T) > 0$*, es decir, en esas condiciones la transformación T no es un monomorfismo.*

   En efecto, como $Im(T) \lhd W$ *entonces* $\dim(Im(T)) \leq \dim(W)$*, como por hipótesis se tiene* $\dim(W) < \dim(V)$ *entonces* $\dim(Im(T)) \leq \dim(W) < \dim(V)$*. Despejando* $\dim(Ker(T))$ *tenemos*

   $$\dim(Ker(T)) = \dim(V) - \dim(Im(T)) > 0.$$

3. *Si* $\dim(V) = \dim(W)$ *entonces T inyectiva $\Leftrightarrow$ T sobreyectiva.*

   En efecto, como $\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = \dim(V) = \dim(W)$ *entonces*

   $$\dim(Ker(T)) = \dim(W) - \dim(Im(T)).$$

   Si T es inyectiva entonces $\dim(Ker(T)) = 0$ *de donde* $\dim(W) = \dim(Im(T))$ *y entonces T es sobreyectiva.*

   Si T es sobreyectiva entonces $\dim(W) = \dim(Im(T))$ *de donde* $\dim(Ker(T)) = 0$ *y entonces T es inyectiva.*

Ejemplo 13.6.1. *Determine una transformación lineal* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $Ker(T) = \langle\{(1, 2, 0)\}\rangle$ *e* $Im(T) = \langle\{(0, 1, 2), (0, 0, 3)\}\rangle$. *Determine además* $T(-1, 2, 3)$.

Solución.

Sabemos que una transformación lineal queda completamente determinada cuando conocemos lo que ella le hace a una base del espacio dominio.

Usando la demostración del Teorema de la Dimensión, debemos agregar dos vectores a la base del $Ker(T)$ para formar una base de $\mathbb{R}_{\mathbb{R}^3}$; si escogemos $v_1 = (0, 1, 0)$ tal que $T(0, 1, 0) = (0, 1, 2)$ y $v_2 = (0, 0, 1)$ tal que $T(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$ entonces el conjunto $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}_{\mathbb{R}^3}$, observe que el conjunto es linealmente independiente ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

está escalonada con las tres filas no nulas y es entonces un conjunto máximo de vectores L.I.

Sea $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}_{\mathbb{R}^3}$ entonces, existen escalares únicos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tal que $(x, y, z) = a_1(1, 2, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)$, de aquí deducimos el sistema lineal

$$\begin{cases} x = a_1 \\ y = 2a_1 + a_2 \\ z = a_3 \end{cases}$$

de donde $a_1 = x$, $a_2 = y - 2x$, $a_3 = z$; luego, $(x, y, z) = x(1, 2, 0) + (y - 2x)(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, aplicando la transformación lineal T obtenemos

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 2, 0) + (y - 2x)T(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(0, 0, 0) + (y - 2x)(0, 1, 2) + z(0, 0, 3) \\ &= (0, y - 2x, 2y - 4x + 3z). \end{aligned}$$

Ahora, $T(-1, 2, 3) = (0, 4, 17)$.

Ejemplo 13.6.2. *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una transformación lineal tal que* $T(1, 2, 0) = (3, 1, 0)$, $T(0, 1, 2) = (1, 1, 1)$.

a) Determine $T(x, y, z)$.

b) Determine $T(1, 2, 3)$.

Solución.

a) Para determinar una transformación lineal necesitamos conocer la acción de ella sobre una base, por lo tanto debemos agregar un vector a los dos vectores dados, declarando su imagen.

Si agregamos el vector canónico $(0, 0, 1)$ tal que, por ejemplo, $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ entonces podemos expresar el vector (x, y, z) como combinación lineal de la base $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$.

Sea $(x,y,z) = a(1,2,0) + b(0,1,2) + c(0,0,1)$, entonces del sistema que se produce obtenemos la siguiente relación $a = x$, $b = y - 2x$, $c = z - 2y + 4x$, así,

$$(x,y,z) = x(1,2,0) + (y-2x)(0,1,2) + (z-2y+4x)(0,0,1).$$

Tenemos, $T(x,y,z) = xT(1,2,0) + (y-2x)T(0,1,2) + (z-2y+4x)T(0,0,1)$, de donde

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x(3,1,0) + (y-2x)(0,1,2) + (z-2y+4x)(0,0,1) \\ &= (x+y, -x+y, 2x-y+z). \end{aligned}$$

b) Reemplazando en la transformación lineal encontrada obtenemos $T(1,2,3) = (3,1,3)$.

13.7. EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 13.1. Verifique si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (x+y, y, x-y)$, es una transformación lineal.

Solución.

a) Sean $v_1 = (x,y)$, $v_2 = (p,q) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned} T(v_1+v_2) &= T(x+p, y+q) \\ &= ((x+p)+(y+q), y+q, (x+p)-(y+q) \\ &= ((x+y)+(p+q), y+q, (x-y)+(p-q)) \\ &= (x+y, y, x-y) + (p+q, q, p-q) \\ &= T(x,y) + T(p,q) \\ &= T(v_1) + T(v_2) \end{aligned}$$

b) Sean $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} T(kv) &= T(kx, ky) \\ &= (kx+ky, ky, kx-ky) \\ &= k(x+y, y, x-y) \\ &= kT(x,y) \\ &= k(Tv) \end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal.

Ejercicio 13.2. Verifique si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, x-y+2)$, es una transformación lineal.

Solución.
Claramente T no es transformación lineal ya que $T(0,0) = (0,2) \neq (0,0)$.

Ejercicio 13.3. Verifique si la transformación $T : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ tal que $T(X) = MX + XM$ donde M es una matriz fija en $M(n,\mathbb{R})$, es una transformación lineal.

Solución.

a) Sean $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ entonces:

$$\begin{aligned} T(A+B) &= M(A+B) + (A+B)M \\ &= (MA+MB) + (AM+BM) \\ &= T(A) + T(B). \end{aligned}$$

b) Sea $A \in M(n,\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} T(kA) &= M(kA) + (kA)M \\ &= kMA + kAM \\ &= k(MA + AM) \\ &= kT(A). \end{aligned}$$

Por a) y b), T es una transformación lineal.

Ejercicio 13.4. Sea $T : \mathbb{R}_2(x) \to M(2,\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a+b+c \end{pmatrix}.$$

a) Determine $\dim(Ker(T))$.

b) Extienda la base de $Ker(T)$ a una base de $\mathbb{R}_2(x)$.

c) Determine $\dim(Im(T))$.

Solución.

a) Sea $a + bx + cx^2 \in Ker(T)$ entonces

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de esto último deducimos que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solucionando el sistema que se origina concluimos que $a = 0$, $a+b+c = 0$, así $a = 0$, $c = -b$. Concluimos entonces que $Ker(T) = \left\{bx - bx^2 \,/\, b \in \mathbb{R}\right\}$.
Como $bx - bx^2 = b(x - x^2) \in Ker(T)$, $b \in \mathbb{R}$ entonces $Ker(T) = \langle \left\{x - x^2\right\} \rangle$ de donde $\dim(Ker(T)) = 1$ ya que el conjunto formado por un único vector es linealmente independiente.

b) $\mathbb{R}_2(x)$ tiene dimensión 3, por lo tanto, a la base del $Ker(T)$ debemos agregar dos vectores tal que, los tres vectores sean linealmente independientes (maximal L.I.).

Podemos agregar, por ejemplo, los vectores canónicos $1, x^2$.

Se puede verificar, rápidamente, que $\{1, x - x^2, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente, por ejemplo usando la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que está escalonada.

c) Usando el Teorema de la dimensión obtenemos

$$\dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}_2(x)) - \dim(Ker(T)) = 3 - 2 = 1.$$

Ejercicio 13.5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1,2,0) = (3,1,0) \quad , \quad T(0,1,2) = (1,1,1).$$

a) Determine $T(x,y,z)$.

b) Determine $T(1,2,3)$.

Solución.

a) Para determinar una transformación lineal necesitamos conocer la acción de ella sobre una base, por lo tanto debemos agregar un vector a los dos vectores dados, declarando su imagen.

Si agregamos el vector canónico $(0,0,1)$ tal que, por ejemplo, $T(0,0,1) = (0,0,1)$ entonces podemos expresar el vector genérico (x,y,z) como combinación lineal de la base $\{(1,2,0), (0,1,2), (0,0,1)\}$.

Sea $(x,y,z) = a(1,2,0) + b(0,1,2) + c(0,0,1)$, entonces del sistema que se produce obtenemos la siguiente relación: $a = x$, $b = y - 2x$, $c = z - 2y + 4x$, así

$$(x,y,z) = x(1,2,0) + (y-2x)(0,1,2) + (z-2y+4x)(0,0,1).$$

Tenemos $T(x,y,z) = xT(1,2,0) + (y-2x)T(0,1,2) + (z-2y+4x)T(0,0,1)$, de donde

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x(3,1,0) + (y-2x)(0,1,2) + (z-2y+4x)(0,0,1) \\ &= (x+y, -x+y, 2x-y+z). \end{aligned}$$

b) Para determinar la imagen del vector $(1,2,3)$ por la transformación lineal T basta con reemplazar, en la transformación lineal ya determinada, x, y, z por $1, 2, 3$ respectivamente, obtenemos $T(1,2,3) = (3,1,3)$.

13.8. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 13.1. Determine cuales de las siguientes transformaciones son transformaciones lineales.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x, y)$.

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(X) = X$.

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, y, z) + (1, 2, 3)$.

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x, y, x - z)$.

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + 1, z + 2)$.

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (ax + by, cx + dy),\ a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$.

g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x^2, y^2)$.

h) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = |x - y|$.

i) $T : M(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \det(A)$.

j) $T : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ tal que:

   i) $T(A) = AB - B^2A$, $B \in M(n, \mathbb{R})$ matriz fija.
   ii) $T(A) = AB - BA$, $B \in M(n, \mathbb{R})$ matriz fija.
   iii) $T(A) = A^t$.

Ejercicio 13.2. Sean V, W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $T : V \to W$ una transformación lineal

a) Si $T(u) = w$ y $T(v) = 0$ demuestre que $T(u + v) = w$, $u, v \in V$.

b) Demuestre que $T(-v) = -T(v)$.

c) Si $Ker(T) = \{v \in V \,/\, T(v) = 0\}$ demuestre que $Ker(T) \triangleleft V$.

d) Demuestre que $Im(T) = \{w \in W \,/\, \exists\, v \in V \text{ tal que } w = T(v)\} \triangleleft W$.

e) Demuestre que si $T(0_V) \neq 0_W$ entonces T no es transformación lineal.

f) Si $f : V \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ son dos transformaciones lineales demuestre que la transformación $S : V \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(v) = (f(v), g(v))$ es una transformación lineal.

g) Si $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de V entonces $T(v)$ se escribe de manera única.

Ejercicio 13.3. Sea V el espacio formado por todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Definimos la transformación

$$T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt.$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

Ejercicio 13.4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x, y) = (x+y, 2x-y)$.

a) Determine $Ker(T)$.

b) Determine $\dim(Ker(T))$.

Ejercicio 13.5. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $Ker(T) = \{0\}$. Demuestre que si $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ es un conjunto linealmente dependiente entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente.

Ejercicio 13.6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación tal que

$$T(1, -1, 1) = (-1, 0, 3) \quad , \quad T(0, 2, 0) = (4, 2, 2) \quad , \quad T(1, 0, 0) = (1, 1, 2).$$

a) Demuestre que $A = \{(1, -1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

b) Determine la transformación lineal $T(x, y, z)$.

c) Determine $\dim(Ker(T))$.

Ejercicio 13.7. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación y

$$A = \{(0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 2), (1, 0, 0, 0)\}.$$

Asigne imágenes a los vectores de A de modo que T sea una transformación lineal inyectiva.

Ejercicio 13.8. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación tal que $T(x, y, z) = (x-y+2z, x+2y, -x-2y+2z)$.

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Determine $\dim(Ker(T))$.

c) Extienda la base encontrada de $Ker(T)$ a una base de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 13.9. Determine una transformación lineal $T : M(3, 1, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y además $Im(T) = \langle \{(1, 0, 1), (-2, 1, 3)\} \rangle$. Justifique.

Ejercicio 13.10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z)$. ¿Qué condiciones deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que $(a, b, c) \in Ker(T)$?.

Ejercicio 13.11. Sea $T : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R})$ una transformación lineal tal que $T(A) = BAB^t$, con $B \in M(n, \mathbb{R})$ una matriz fija.

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Si $n = 2$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ determine:

   i) $Ker(T)$.

   ii) $\dim(Ker(T))$.

Ejercicio 13.12. Hallar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\langle \{v_1 = (1, -1, 2, 1), v_2 = (0, -1, 2, 1)\} \rangle = Ker(T)$$

y

$$\langle \{w_1 = (1, 2, -1), w_2 = (2, 1, -2)\} \rangle = Im(T).$$

Ejercicio 13.13. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ una transformación lineal tal que

$$T(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)dt.$$

a) Determine $\dim(Ker(T))$.

b) Determine $\dim(Im(T))$.

Ejercicio 13.14. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación definida por $T(x, y, z) = (x+y, 2z)$.

a) Si B es la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3_{\mathbb{R}}$ y B_1 es la base canónica ordenada de $\mathbb{R}^2_{\mathbb{R}}$ determine la matriz asociada a la transformación lineal T.

b) Si $B = \{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 0, 0), v_3 = (1, 1, 1)\}$ y $B_1 = \{w_1 = (0, -1), w_2 = (1, 2)\}$. ¿Cuál es ahora la matriz asociada a la transformación lineal T?.

Ejercicio 13.15. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to M(2, \mathbb{R})$ tal que

$$Ker(T) = \langle \{1 + x^2\} \rangle \quad , \quad Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \,/\, a = b, d = c \right\}.$$

Ejercicio 13.16. Sea $B = \{v_1 + v_3, v_2 + v_3, v_1 + v_2\}$ base de V_K, definimos la transformación $T : V \to V$ por

$$T(k_1(v_1 + v_3) + k_2(v_2 + v_3) + k_3(v_1 + v_2)) = \sum_{i=1}^{3} k_i v_i.$$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Demuestre que T es un isomorfismo.

Ejercicio 13.17. Se define la transformación $T : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por

$$T(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) ¿Es T una transformación lineal inyectiva?. Justifique.