ÍNDICE

CAPÍTULO 6
NÚMEROS COMPLEJOS

6.1. INTRODUCCIÓN

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ ya que no existe un número real x tal que $x^2 = -1$. Necesitamos un conjunto que contenga a $\mathbb{R}$, que solucione lo que soluciona $\mathbb{R}$ y que, por ejemplo, solucione el problema planteado, tal conjunto es el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

Se define al conjunto $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C} = \{z = (a, b) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

6.2. OPERACIONES CON COMPLEJOS

Definición 6.2.1. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Definición 6.2.2. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces, la suma de complejos, denotada $+$, es tal que

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}.$$

Ejemplo 6.2.1. *Si* $z_1 = (-2, 6)$, $z_2 = (4, 3)$ *entonces* $z_1 + z_2 = (-2, 6) + (4, 3) = (2, 9)$.

Teorema 6.2.1. $(\mathbb{C}, +)$ *es un grupo conmutativo, es decir,*

1. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Asociatividad de la Suma.*

2. *Existe el complejo* z_N *tal que* $z_N + z = z + z_N = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. z_N *Neutro Aditivo.*

3. *$\forall\, z \in \mathbb{C}\, \exists\, z_{op} \in \mathbb{C}$ tal que $z + z_{op} = z_{op} + z = z_N$. z_{op} Opuesto de z.*

4. *$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Conmutatividad de la Suma.*

Demostración.

2. Sean $z = (a, b)$, $z_N = (x, y) \in \mathbb{C}$; imponiendo la condición de neutro tenemos $z + z_N = z$, es decir, $(a, b) + (x, y) = (a, b)$; debemos determinar x e y,

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \Rightarrow (a + x, y + b) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a + x = a \\ y + b = b \end{cases}$$

como este sistema ocurre en $\mathbb{R}$ entonces $x = 0$ e $y = 0$, de donde $z_N = (0, 0)$. Por otro lado, $z_N + z = (0, 0) + (a, b) = (a, b) = z$.

4. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$ entonces,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \\ &\overset{*}{=} (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

$*$: por la conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$.

Es inmediato determinar que

a) $z_N = (0, 0)$ es único y lo dotamos por 0.

b) Si $z = (a, b)$ entonces $z_{op} = (-a, -b)$ es único y lo denotamos por $-z$.

$\square$

Definición 6.2.3. Sean $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$ entonces, la ponderación del complejo z por el escalar k, denotada kz, es tal que

$$kz = k(a, b) = (ka, kb) \in \mathbb{C}.$$

Observación 6.2.1.

1. $1z = z,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ 1 \in \mathbb{R}$.

2. $(k_1 + k_2)z = k_1 z + k_2 z,\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

3. $(k_1 k_2)z = k_1(k_2 z),\ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \forall\, z \in \mathbb{C}$.

4. $k(z_1 + z_2) = kz_1 + kz_2,\ \forall\, k \in \mathbb{R},\ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 6.2.2. *Sean* $z_1 = (3, -2)$, $z_2 = (2, 4) \in \mathbb{C}$ *entonces*

$$3z_1 - 2z_2 = 3(3, -2) - 2(2, 4) = (5, -14).$$

Definición 6.2.4. Sean $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$, entonces el producto de complejos es tal que

$$z_1 z_2 = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}.$$

Teorema 6.2.2. *Se cumple:*

1. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$, $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. *Asociatividad del producto.*
2. *Existe el complejo* z_N *tal que* $z_N \cdot z = z \cdot z_N = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. z_N*: Neutro multiplicativo.*
3. $\forall\, z \in \mathbb{C} - \{0\}\ \exists\, z_{inv} \in \mathbb{C}$ *tal que* $z \cdot z_{inv} = z_{inv} \cdot z = z_N$. z_{inv}*: Inverso multiplicativo.*
4. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Conmutatividad del producto.*

Demostración.

2) Sean $z = (a, b) \neq (0, 0)$, $z_N = (x, y) \in \mathbb{C}$, entonces, como debe cumplirse que $z_N \cdot z = z$ tenemos,

$$z_N \cdot z = z \Rightarrow (x, y)(a, b) = (a, b) \Rightarrow (xa - yb, xb + ya) = (a, b).$$

Por la igualdad de complejos deducimos el sistema

$$\begin{cases} xa - yb = a \\ xb + ya = b \end{cases}$$

multiplicando la primera ecuación por a y la segunda ecuación por b, sumando obtenemos $xa^2 + xb^2 = a^2 + b^2$ de donde $x = 1$; podemos deducir que $y = 0$, de donde $z_N = (1, 0)$.

Por otro lado, $z \cdot z_N = (a, b)(1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b) = z$. Si $z = (a, 0)$, $z = (0, b)$, $z = (0, 0)$ también se cumple $(1, 0) \cdot z = z \cdot (1, 0) = z$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

3) Sean $z = (a, b) \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_{inv} = (x, y)$, entonces se debe cumplir que $z \cdot z_{inv} = (1, 0)$, es decir, se debe cumplir que $(a, b)(x, y) = (1, 0)$; tenemos,

$$\begin{aligned} (a, b)(x, y) = (1, 0) \quad &\Rightarrow \quad (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por a, la segunda ecuación por b y sumando, obtenemos $a^2x + b^2x = a$ de donde $x = \frac{a}{a^2+b^2}$; usted puede concluir que $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$, de donde, el inverso multiplicativo de $z = (a, b)$ es $z_{inv} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

□

Observación 6.2.2.

a) $z_N = (1, 0)$ es único y lo dotamos por 1.

b) Si $z = (a, b) \neq (0, 0)$ entonces $z_{inv} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ es único y lo denotamos por z^{-1}, así,

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Observación 6.2.3. Definimos el cuociente $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ por $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$.

6.3. SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{C}$

Existen dos importantes subconjuntos de $\mathbb{C}$,

a) Complejos reales, denotado $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$, tal que $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} = \{z = (a, b) \,/\, b = 0\} \subseteq \mathbb{C}$.

b) Complejos imaginarios, denotado I, tal que $I = \{z = (a, b) \,/\, a = 0\} \subseteq \mathbb{C}$.

Observación 6.3.1.

1. Aceptaremos que existe un isomorfismo entre $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ y $\mathbb{R}$ el cual nos permite identificar el complejo real $(a, 0)$ con el real a, así, $(a, 0) = a$.

2. En los complejos imaginarios, la unidad imaginaria es $i = (0, 1)$.

Potencias de i

Se cumple,

a) $i = (0, 1)$.

b) $i^2 = -1$ ya que $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

c) $i^3 = -i$.

d) $i^4 = 1$.

e)
$$i^n = \begin{cases} i & \text{si } n = 4p + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4p + 2 \\ -i & \text{si } n = 4p + 3 \\ 1 & \text{si } n = 4p \end{cases}$$

con $n, p \in \mathbb{N}$.

Observación 6.3.2.

1. $\mathbb{C}$ no es ordenado.

   Haremos la demostración por reducción al absurdo.

   Supongamos que $\mathbb{C}$ es ordenado, entonces existe $\mathbb{C}^+ \subseteq \mathbb{C}$ tal que,

   a) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow \begin{cases} (z_1 + z_2) \in \mathbb{C}^+ \\ z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}^+ \end{cases}$

   b) $\forall\, z \in \mathbb{C}$ se cumple sólo una de las siguientes,

   $$i)\ z \in \mathbb{C}^+ \quad ii)\ -z \in \mathbb{C}^+ \quad iii)\ z = 0.$$

   Sea $i = (0,1) \in \mathbb{C} - \{0\}$ y supongamos que $i \in \mathbb{C}^+$, entonces por a) $i^2 = -1 \in \mathbb{C}^+$, así, por a) $(-1)(-1) = 1 \in \mathbb{C}^+$, es decir, -1 y $1 \in \mathbb{C}^+ \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$.

   Por otro lado si suponemos que $-i \in \mathbb{C}^+$, entonces por a) $(-i)^2 = i^2 - 1 \in \mathbb{C}^+$, así, por a) $(-1)(-1) = 1 \in \mathbb{C}^+$, es decir, -1 y $1 \in \mathbb{C}^+ \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$.

   Luego, $\mathbb{C}$ no puede ser un conjunto ordenado.

2. Si $p \in \mathbb{R}^-$ entonces $\sqrt{p} = i\sqrt{-p} \in \mathbb{C}$.

   En efecto, sea $\sqrt{p} = (x,y)$ donde $p = (p,0)$ entonces $(p,0) = (x,y)(x,y)$ es decir $(p,0) = (x^2 - y^2, 2xy)$, de aquí concluimos que

   $$\begin{cases} p = x^2 - y^2 \\ 0 = 2xy \end{cases}$$

   De la segunda ecuación concluimos que $x = 0 \vee y = 0$, notamos que $y \neq 0$, ya que si $y = 0$ entonces $\sqrt{p} = (x,0) = x \in \mathbb{R}$ (esto es una contradicción), luego $x = 0$.

   Como $x = 0$ entonces, reemplazando en la primera ecuación del sistema obtenemos $p = -y^2$ es decir, $y^2 = -p \in \mathbb{R}$, luego $y = \sqrt{-p} \in \mathbb{R}$; finalmente $\sqrt{p} = (0, \sqrt{-p}) = i\sqrt{-p}$.

6.4. COMPLEJOS EN FORMA CANÓNICA

Sea $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ entonces la forma canónica del complejo es $z = a + bi$. En efecto,

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi.$$

6.5. OPERATORIA CON COMPLEJOS CANÓNICOS

La suma, producto y ponderación por escalar se realiza como si ellos fuesen polinomios, considerando las potencias de i.

Por ejemplo,

$$(5 - 4i)(2 + 3i) = 10 + 15i - 8i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 = 22 + 7i.$$

La división de complejos en forma canónica se efectúa, amplificando por el “conjugado” del complejo divisor, por ejemplo, $\frac{2+3i}{4+5i} = \frac{2+3i}{4+5i} \cdot \frac{4-5i}{4-5i}$; al efectuar las multiplicaciones obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{8-10i+12i-15i^2}{16-25i^2} &= \frac{8-10i+12i-15(-1)}{16-25(-1)} \\ &= \frac{23+2i}{41} \\ &= \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i \end{aligned}$$

6.6. CONJUGADO DE UN COMPLEJO

Definición 6.6.1. Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, definimos el conjugado del complejo z, denotado $\bar{z}$ como $\bar{z} = (a, -b) \in \mathbb{C}$.

Teorema 6.6.1. *Para todo z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple,*

1. $\overline{(\bar{z})} = z$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.
5. $z + \bar{z} = 2a, \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ *si* $z = (a, b)$.

Demostración.

1. Si $z = a + bi$ entonces $\bar{z} = a - bi$ de donde $\overline{(\bar{z})} = a + bi = z$.
2. Si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ entonces $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ de donde

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= (a+c) - (b+d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

5. Si $z = (a, b)$ entonces $z + \bar{z} = (a, b) + (a, -b) = (2a, 0) = 2a$; por otro lado

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a, b)(a, -b) \\ &= (a^2 + b^2, 0) \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

Notación 6.6.1. *Sea $z = a+bi$ un número complejo entonces la parte real de z, denotada $Re(z)$ es $a = Re(z)$ y la parte imaginaria de z, denotada $Im(z)$ es $b = Im(z)$.*

Ejemplo 6.6.1. *Determine $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $z^2 = \bar{z}$.*

Solución. Sea $z = a+bi$ entonces, imponiendo la condición obtenemos $(a+bi)^2 = a-bi$,

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 = a-bi \quad &\Rightarrow \quad a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a - bi \\ &\Rightarrow \quad (a^2 - b^2) + 2abi = a - bi \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = a & (1) \\ 2ab = -b & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

De (2) y suponiendo que $b \neq 0$ obtenemos $a = -\frac{1}{2}$; reemplazando en (1) conseguimos $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - b^2 = -\frac{1}{2}$, de aquí concluimos que $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces los complejos que se obtienen son

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Si $b = 0$ entonces reemplazando en (1) conseguimos $a^2 = a$, de donde $a = 0$, $a = 1$; como no puede ocurrir que $a = 0$ entonces el complejo que se determina, ahora es $z = 1$.

Ejemplo 6.6.2. *Si $z = a + bi$, determine $\frac{iRe(z)}{Im(iz)}$.*

Solución. Como $iz = i(a + bi) = ai + bi^2 = -b + ai$ entonces

$$\frac{iRe(z)}{Im(iz)} = \frac{ia}{a} = i.$$

6.7. NORMA O MÓDULO DE UN COMPLEJO

Definición 6.7.1. Sea $z = (a, b) = a + bi$ un número complejo entonces, la norma del complejo, denotada $|z|$ es tal que $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

Teorema 6.7.1. *Para todo z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple,*

1) $|z| \geq 0$.

2) $|z| = |\bar{z}|$.

3) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ *ó* $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

6) $|Re(z)| \leq |z|$, $\quad |Im(z)| \leq |z|$.

7) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$.

8) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

9) $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$.

Demostración. Demostración de la propiedad 8).

$$\begin{array}{rcl} |z_1+z_2|^2 & = & (z_1+z_2)\cdot\overline{(z_1+z_2)} \\ & = & (z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ & = & z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2} \\ & \stackrel{*}{=} & |z_1|^2+2Re\,(z_1\cdot\overline{z_2})+|z_2|^2 \\ & \stackrel{**}{\leq} & |z_1|^2+2|z_1\cdot z_2|+|z_2|^2 \\ & = & (|z_1|+|z_2|)^2\,. \end{array}$$

Sacando raíz cuadrada conseguimos lo pedido.

$*$: $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$.

$**$: $\frac{z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2}{2} = Re(z_1\cdot\overline{z_2})$. □

6.8. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Considere el número complejo $z = (a,b) = a + bi$, entonces definimos el argumento de z, denotado $\arg(z) = \theta$, como aquel ángulo θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tal que $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$; además, si $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ concluimos que la forma trigonométrica de z es

$$z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)).$$

Ejemplo 6.8.1. *Escriba en forma trigonométrica los siguientes números complejos,*

a) $z_1 = 2 + 2i$.

b) $z_2 = -2 - 2i$.

c) $z_3 = -2 + 2i$.

d) $z_4 = 2 - 2i$.

e) $z_5 = 2i$.

f) $z_6 = -3$.

Solución.

a) Como $a = 2$, $b = 2$ entonces $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; por otro lado, el complejo está en el primer cuadrante, de donde $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(1) = 45°$, así entonces

$$z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(45°) + i\,\mathrm{sen}(45°)).$$

b) Como $a = -2$, $b = -2$ entonces $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; por otro lado, el complejo está en el tercer cuadrante, de donde $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(1) = 225°$, así entonces

$$z_2 = -2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos(225°) + i\,\mathrm{sen}(225°)).$$

c) $z_3 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(135°) + i\,\mathrm{sen}(135°))$.

d) $z_4 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos(315°) + i\,\mathrm{sen}(315°))$.

e) $z_5 = 2i = 2(\cos(90°) + i\,\mathrm{sen}(90°))$ ya que el complejo está en el eje Y y el argumento es, inmediatamente, $\theta = 90°$.

f) $z_6 = -3 = 3(\cos(180°) + i\,\mathrm{sen}(180°))$.

6.9. OPERATORIA CON COMPLEJOS TRIGONOMÉTRICOS

Teorema 6.9.1. *Sean $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))$, $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))$ dos complejos, entonces,*

a)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1)) \cdot r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos(\theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1))}{r_2(\cos(\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2))} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)); z_2 \neq 0.$$

c)

$$z^n = [r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)); n \in \mathbb{N}.$$

Observación 6.9.1.

1. El teorema en su parte a) y b) se demuestra con ayuda de las identidades trigonométricas: $\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)$.

2. La parte c) del teorema se demuestra usando inducción y se llama Teorema de De Moivre.

3. Si $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) \neq 0$ entonces:

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{\cos(0^\circ)+i\operatorname{sen}(0^\circ)}{r(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))}\\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\operatorname{sen}(-\theta))\\ &= \frac{1}{r}(\cos(\theta)-i\operatorname{sen}(\theta)).\end{aligned}$$

b) $\dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{r^n}(\cos(n\theta)-\operatorname{sen}(n\theta))$.

Ejemplo 6.9.1. *Calcule* $(-1+i)^{42}$.

Solución. Como $z=-1+i=\sqrt{2}\,(\cos(135^\circ)+i\operatorname{sen}(135^\circ))$ entonces,

$$\begin{aligned}(-1+i)^{42} &= \left[\sqrt{2}\,(\cos(135^\circ)+i\operatorname{sen}(135^\circ))\right]^{42}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{42}(\cos(42\cdot 135)^\circ+i\operatorname{sen}(42\cdot 135)^\circ)\\ &= 2^{21}\,(\cos(5670^\circ)+i\operatorname{sen}(5670)^\circ)\\ &= 2^{21}\,(\cos(15\cdot 360+270)^\circ+i\operatorname{sen}(15\cdot 360+270)^\circ)\\ &= 2^{21}\,(\cos(270^\circ)+i\operatorname{sen}(270^\circ))\\ &= -2^{21}i.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.9.2. *Escriba en forma* $a+bi$ *la expresión* $\left(\frac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6}$.

Solución. Escribimos cada complejo en su forma trigonométrica, los dividimos, aplicamos el Teorema de DeMoivre y listo.

$$\begin{aligned}\left(\frac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6} &= \left(\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right)^{6}\\ &= \left(\frac{5\sqrt{2}(\cos(45^\circ)+i\operatorname{sen}(45^\circ))}{20(\cos(30^\circ)+i\operatorname{sen}(30^\circ))}\right)^{6}\\ &= \left[\frac{5\sqrt{2}}{20}(\cos(45^\circ-30^\circ)+i\operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ))\right]^{6}\\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos(15^\circ)+i\operatorname{sen}(15^\circ))\right]^{6}\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6}(\cos(90^\circ)+i\operatorname{sen}(90^\circ))\\ &= \frac{1}{512}(0+i)\\ &= \frac{1}{512}i.\end{aligned}$$

Definición 6.9.1. Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Decimos que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z si y sólo si $w^n = z$.

Observación 6.9.2. Si denotamos $w = \sqrt[n]{z}$ entonces $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$.

Ejemplo 6.9.3. *Verifique que* $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $w_3 = 1$ *son raíces cúbicas de 1.*

Solución. Debemos demostrar que $w_i^3 = 1$, $i = 1, 2, 3$.
Como $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i} = \cos(120°) + i \operatorname{sen}(120°)$ entonces, usando el teorema de De Moivre obtenemos

$$w_1^3 = [\cos(120°) + i \operatorname{sen}(120°)]^3 = \cos(360°) + i \operatorname{sen}(360°) = 1.$$

De manera análoga,

$$w_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)^3 = (\cos(240°) + i \operatorname{sen}(240°))^3 = \cos(720°) + i \operatorname{sen}(720°) = 1.$$

6.10. RAÍCES DEL COMPLEJO $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \neq 0$

Las n raíces n-ésimas del complejo $z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \neq 0$ son

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\tfrac{\theta + k\cdot 360°}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta + k\cdot 360°}{n}\right)\right),$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Observación 6.10.1. Note que

$$\begin{aligned} w_k^n &= \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\tfrac{\theta + k\cdot 360°}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta + k\cdot 360°}{n}\right)\right)\right]^n \\ &= \left(\sqrt[n]{r}\right)^n \left(\cos\left(\tfrac{\theta + k\cdot 360°}{n} \cdot n\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{\theta + k\cdot 360°}{n} \cdot n\right)\right) \\ &= r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \\ &= z. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.10.1. *Calcule las tres raíces cúbicas de* -8.

Solución. Como $z = -8 = 8(\cos(180°) + i \operatorname{sen}(180°))$ entonces,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-8} &= \sqrt{8(\cos(180°) + i \operatorname{sen}(180°))} \\ &= w_k \\ &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\tfrac{180° + k\cdot 360°}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tfrac{180° + k360°}{3}\right)\right), \end{aligned}$$

con $k = 0, 1, 2$.

Si $k = 0$ entonces $w_0 = 2(\cos(60°) + i \operatorname{sen}(60°)) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Si $k = 1$ entonces $w_1 = 2(\cos(180°) + i \operatorname{sen}(180°)) = 2(-1 + 0i) = -2$.

Si $k=2$ entonces $w_2 = 2(\cos(300°) + i\,\text{sen}(300°)) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 1 - i\sqrt{3}$, así,

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} -2 \\ 1 + i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$$

Ejemplo 6.10.2. *Determine* $m, n \in \mathbb{R}$ *tal que* $z = 1 + i$ *sea raíz de la ecuación* $z^5 + mz^3 + n = 0$.

Solución. Si $z = 1 + i$ entonces $z = \sqrt{2}(\cos(45°) + i\,\text{sen}(45°))$ de donde

$$\begin{aligned} z^5 &= \left[\sqrt{2}(\cos(45°) + i\,\text{sen}(45°))\right]^5 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^5 (\cos(225°) + i\,\text{sen}(225°)) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^5 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= -4 - 4i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= \left[\sqrt{2}(\cos(45°) + i\,\text{sen}(45°))\right]^3 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^3 (\cos(125°) + i\,\text{sen}(125°)) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= -2 + 2i. \end{aligned}$$

De $z^5 + mz^3 + n = 0$ obtenemos $(-4 - 4i) + m(-2 + 2i) + n = 0 + 0i$ es decir, obtenemos

$$\begin{cases} -4 - 2m + n = 0 \\ -4 + 2m = 0 \end{cases}$$

Como $m = 2$, si reemplazamos este valor en la ecuación $-4 - 2m + n = 0$ conseguimos $n = 8$.

Ejemplo 6.10.3. *Calcule el valor de* $(1 + w)^3 + (1 + w^2)^9$ *si,* w *es raíz cúbica de 1 y distinta de la unidad.*

Solución.

Ya hemos visto en un ejemplo anterior, las tres raíces cúbicas del 1; las dos raíces distintas del 1 son $w_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$; $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, sin embargo, no conviene reemplazar cada una de estas raíces en la igualdad planteada, nos conviene realizar el calculo de la siguiente manera.

Como w es raíz cúbica de 1 entonces $w^3 = 1$, de aquí obtenemos $w^3 - 1 = 0$, factorizando tenemos $(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$.

Como $w \neq 1$ entonces $w^2 + w + 1 = 0$ así, $1 + w = -w^2$ y $1 + w^2 = -w$ entonces

$$\begin{aligned}(1+w)^3 + (1+w^2)^2 &= (-w^2)^3 + (-w)^9 \\ &= -w^6 - w^9 \\ &= -(w^3)^2 - (w^3)^3 \\ &= -1 - 1 \\ &= -2.\end{aligned}$$

6.11. FORMA EXPONENCIAL

La ecuación $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ que define a $e^{i\theta}$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, se conoce como la fórmula de Euler; así,

$$z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) = re^{i\theta}.$$

Observación 6.11.1. Se puede demostrar que

a) $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

b) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Ejemplo 6.11.1. *Calcule* $(1-i)^{23}$.

Solución.

$$\begin{aligned}(1-i)^{23} &= \left(\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)^{23} \\ &= 2^{\frac{23}{2}}e^{\frac{161\pi}{4}i}.\end{aligned}$$

Ejemplo 6.11.2. *Demuestre que:*

a) $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$.

b) $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Solución.

a) $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos(\theta)+i\,\mathrm{sen}(\theta)+\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}(-\theta)}{2} = \cos(\theta)$.

b) Se demuestra de manera análoga.

Ejemplo 6.11.3. *Demuestre que* $\mathrm{sen}^3(\theta) = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}(\theta) - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(3\theta)$.

Solución.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^{33}}{8i^3} \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{3}{-8i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) - \frac{1}{8i}\left(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\right) \\
&= \frac{3}{4}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}}{2i} \\
&= \frac{3}{4}\operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3\theta)
\end{aligned}
$$

6.12. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 6.1. Determine los números reales x e y tal que $3(x+2)+2iy-ix+5y=7+5i$. Resp. $x=-\frac{23}{11}$, $y=\frac{16}{11}$.

Ejercicio 6.2. En los siguientes ejercicios reduzca a la forma $a+bi$.

(a) $(3+5i)+(5+2i)-(4+7i)^2$ $\quad(c)$ $\dfrac{-5-2i}{4+i}+\dfrac{2+5i}{3i}$ $\quad(e)$ $\dfrac{(-5+i)(1+i)}{3-i}+i$

(b) $(2+3i)(5-3i)(-4+5i^5)$ $\quad(d)$ $\dfrac{3}{4(5-i)(4+6i)}$ $\quad(f)$ $\left[\dfrac{2i^{37}}{(2+i)(3+4i)}\right]^2$

Ejercicio 6.3. Si $z=a+bi$, determine,

i) $\dfrac{Re(z)}{iIm(iz)}$. Resp. $-i$.

ii) $[1-Re(z)+iIm(z)]\cdot[1-Re(z)-iIm(z)]$. Resp. $1+a^2+b^2-2a$.

Ejercicio 6.4. Si $z_1=1+2i$, $z_2=-2+i$, $z_3=-1-i$, calcule,

(a) $2z_1+3z_2+3$ $\quad(b)$ $\dfrac{z_1}{iz_2}$ $\quad(c)$ $z_1^2+2z_3^2$ $\quad(d)$ $\dfrac{z_1+z_3}{1+z_2}$.

Ejercicio 6.5. Represente en el plano,

a) $\{z\in\mathbb{C}\,/\,Re(z)=2\}$. Resp. Recta de ecuación $x=2$.

b) $\{z\in\mathbb{C}\,/\,1\le Re(z)\le 2, 0\le Im(z)\le 3\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq 1\}$. Resp. Círculo con centro en $(0,0)$ y radio menor o igual a 1.

d) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-i| \leq 4\}$.

e) $\big\{z \in \mathbb{C} \,/\, Re((z-1)^2) = Re(2z(z-1))\big\}$. Resp. Hipérbola $1 = x^2 - y^2$.

f) $\Big\{z \in \mathbb{C} \,/\, \overline{(z+1)}(z+1) + 2Re(z+1) \leq 0\Big\}$.

Ejercicio 6.6. Determine $Re(p)$ e $Im(p)$ si p es

a) z^3,

b) $\frac{2i}{z}$,

c) $\frac{3}{z^2}$,

donde $z = a + bi$ donde $ab \neq 0$.

Resp. a) $Re(p) = a^3 - 3ab^2$, $Im(p) = 3a^2b - b^3$; b) $Re(p) = \frac{2b}{a^2+b^2}$, $Im(p) = \frac{2a}{a^2+b^2}$.

Ejercicio 6.7. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que

a) $|z| - z = 1 + 2i$. Resp. $\frac{3}{2} - 2i$.

b) $|z| + z = 2 + i$. Resp. $\frac{3}{4} + i$.

c) $z \cdot \bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$. Resp. $\pm\frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{1}{2}i$.

d) $z \cdot \bar{z} + 2z = 3 + i$.

Ejercicio 6.8. Evalúe las siguientes expresiones

a) $|(2-3i)(5+4i)(1+i)|$. Resp. $\sqrt{1066}$.

b) $\left|\dfrac{(2+i)(-3+4i)(5-3i)}{(3-4i)(5+3i)}\right|$. Resp. $\sqrt{5}$.

c) $\left|\dfrac{(3+5i)(5-2i)}{5+2i}\right| \cdot \left|\dfrac{-2}{3i}\right|$. Resp. $\frac{2}{3}\sqrt{34}$.

Ejercicio 6.9. Demuestre que $\forall\, z \in \mathbb{C} : \overline{z^2} = \bar{z}^2$.

Ejercicio 6.10. Encuentre los números complejos z que satisfacen las dos relaciones siguientes,

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

Resp. $z = 6 + 17i$, $z = 6 + 8i$.

Ejercicio 6.11. La suma de dos números complejos es $3+2i$. La parte real de uno de ellos es 2. El cuociente entre ellos es imaginario puro. Hallar ambos números.

Resp. $z_1 = 2+\left(1+\sqrt{3}\right)i$, $z_2 = 1+\left(1-\sqrt{3}\right)i$; $z_1 = 2+\left(1-\sqrt{3}\right)i$, $z_2 = 1+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

Ejercicio 6.12. Analice si se cumplen las siguientes igualdades,

$$a)\ \frac{\overline{(2+i)}^2}{3-4i} = 1 \qquad b)\ \overline{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}^4 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ejercicio 6.13. Verifique si el número complejo $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ satisface la ecuación

$$\frac{3}{z+1} - \frac{1}{z} = 1.$$

Ejercicio 6.14. Demuestre que,

a) $(z-\bar{z})^2 \leq 0, \forall\, z \in \mathbb{C}$.

b) Si $z^2 = \bar{z}^2$ entonces $z \in \mathbb{R} \vee Re(z) = 0$.

Ejercicio 6.15. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = \frac{1}{|z|} = |1-z|$.

Resp. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Ejercicio 6.16. Resuelva

$$\begin{cases} (1+i)z - iu = 2+i \\ (2+i)z + (2-i)u = 2i \end{cases}$$

donde $z, u \in \mathbb{C}$. Resp. $z = \frac{6-9i}{13}$, $u = \frac{-16+11i}{13}$

Ejercicio 6.17. Si $\left(w + \frac{1}{w}\right) \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{C}$, demuestre que $Im(w) = 0 \vee |w| = 1$.

Ejercicio 6.18. Si $z, w \in \mathbb{C}$ y $|z| = 1$, demuestre que $\left|\frac{z+w}{\bar{z}\cdot w+1}\right| = 1$.

Ejercicio 6.19. Calcule

a) $\left|\frac{z}{w}\right|$ si $\frac{z+w}{z-w} = 1+4i$ tal que $z, w \in \mathbb{C}$. Resp. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) $\left|\frac{1}{z} + \frac{1}{u}\right|$ si $z = 3-4i$, $u = 4+3i$.

c) $\left|\frac{1}{z-z^2}\right|$ si $z = 2i$. Resp. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

Ejercicio 6.20. Calcule

$$a) \left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{12} \qquad b) \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}$$

Ejercicio 6.21. Usando De Moivre y Teorema del Binomio demuestre que

a) $\operatorname{sen}(3\theta) = 3\operatorname{sen}(\theta) - 4\operatorname{sen}^3(\theta)$.

b) $\cos(3\theta) = 4\operatorname{sen}^3(\theta) - 3\cos(\theta)$.

Ejercicio 6.22. Exprese en forma $a + bi$

a) $z = \sqrt{-7+24i}$.

b) $z = \left(\frac{10\sqrt{3}+10i}{5+5i}\right)^{-6}$.

c) $z = \sqrt{6+i\sqrt{3}}$. Resp. $z = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

d) $z = \sqrt{-11-60i}$. Resp. $z = 5-6i$, $z = -5+6i$.

e) $S = 1 + \frac{1}{1+i} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{27}}$.

Ejercicio 6.23. Si $w \neq 1$ es una raíz cúbica de 1 verifique si

a) $(1+w^2)^4 = w$.

b) $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = 4$.

c) $(2+2w+5w^2)^6 = 729$.

Ejercicio 6.24. Demuestre que

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6.25. Verifique que

$$(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}+\theta\right)\right].$$

Ejercicio 6.26. Calcule, usando forma trigonométrica

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)$.

b) $\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)$.

c) $\frac{1-i}{1+i}$.

d) $\frac{3-3\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$.

e) $(1-i)^{10}$.

f) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^6$.

g) $(1-i)^{16}+(1+i)$.

h) $\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}$.

i) $(1+i)^{42}$.

Ejercicio 6.27. Resuelva,

$$a)\ \sqrt[3]{-i} \qquad b)\ \sqrt[3]{4\sqrt{3}-4i} \qquad c)\ \sqrt[4]{1}.$$

Ejercicio 6.28. Encuentre las 5 raíces quintas de la unidad.

Ejercicio 6.29. Resuelva la ecuación $z^6-2iz^3-1=0$, $z\in\mathbb{C}$.

Ejercicio 6.30. Si $x_n+iy_n = \left(1+i\sqrt{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} = 2^{2n-2}\sqrt{3}$.

Ejercicio 6.31. Demuestre que

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n = 2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

Ejercicio 6.32. Sea $z\neq 1$ una raíz n-ésima de la unidad. Demuestre que para todo natural distinto del uno se cumple

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0.$$

Ejercicio 6.33. Resuelva la ecuación

$$a)\ x^4+8+8i\sqrt{3}=0 \qquad b)\ x^6+7x^3-8=0.$$

Ejercicio 6.34. Sea $x_n+iy_n=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3n}$. Demuestre que $x_n+2^3x_{n-1}=0$.

Ejercicio 6.35. Si $z=(n-1)!+n!i$ y $w=1+ni$, pruebe que $|zw|=(n-1)!(1+n^2)$.