# ÍNDICE

# CAPÍTULO 8
# SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

## 8.1. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Un conjunto ordenado de números se llama una sucesión, es decir, si afirmamos que un conjunto de números está en sucesión, es que en dicho conjunto existe un primer elemento, un segundo elemento y así sucesivamente.

Formalmente, una sucesión de números reales es una función denotada $a$ que asigna a cada número natural, un número real.

**Definición 8.1.1.** Se llama sucesión real o sucesión numérica a la función

$$a : D \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ tal que } n \mapsto a(n).$$

*Observación* 8.1.1.

a) La imagen $a(n)$ se denota por $a_n$ y decimos que es el $n$-ésimo término.

b) Podemos denotar la sucesión $a$ por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $a_n$ es el término general o término $n$-ésimo de la sucesión.

c) Otra forma de presentar una sucesión es mediante una ley de recurrencia, donde cada término, excepto el primero, se expresa en función de términos anteriores.

**Ejemplo 8.1.1.**

1. *La sucesión* $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene como término general a* $a_n = \frac{n}{n+1}$ *de donde los tres primeros términos son* $a_1 = \frac{1}{2}$ , $a_2 = \frac{2}{3}$ , $a_3 = \frac{3}{4}$ , . . . . *Observe que los términos son decrecientes e intuitivamente, podemos postular que la sucesión tiende a 1.*

*2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $n > 1$.*

*En esta sucesión, definida recursivamente o por recurrencia tenemos*

$$a_1 = \sqrt{2}\,,\; a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}\,,\; a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,,\; \ldots$$

*Podría interesarnos determinar el $n$-ésimo término de la sucesión, el cual sea independiente del conocimiento del término anterior; con un poco de álgebra básica y el uso de las secciones anteriores podemos realizarlo; tenemos,*

$$a_1 = 2^{\frac{1}{2}}\,,\; a_2 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}}\,,\; a_3 = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}}\,,\; \ldots\,,\; a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}}.$$

*La expresión $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ es la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica con primer elemento $a_1 = \frac{1}{2}$ y razón $r = \frac{1}{2}$; esta suma es*

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

*así, el término general de la sucesión es $a_n = 2^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.*

*Si $n$ crece indefinidamente, ¿existe algún número real al cual se aproxime $a_n$?.*

## 8.2. SUCESIÓN CONVERGENTE

**Definición 8.2.1.** La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando $n$ crece indefinidamente si y sólo si $\forall\,\varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > n_0$ se cumple $|a_n - L| < \varepsilon$.

*Observación* 8.2.1.

1. Denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ o abreviadamente $a_n \underset{n\to\infty}{\to} L$.

2. Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite decimos que la sucesión es convergente, en caso contrario la sucesión es divergente.

**Ejemplo 8.2.1.** *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

**Solución.** Debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n > n_0$ se cumple $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Como $\frac{1}{n} > 0$ entonces $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ de donde, a partir de $\frac{1}{n} < \varepsilon$ concluimos que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Tal $n_0$ es cualquier natural mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$.

**Ejemplo 8.2.2.** *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = 0$, *$p, q \in \mathbb{Z}^+$.*

**Solución.** Sea$\varepsilon > 0$ y consideremos el real $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{p}}$ entonces, por Arquímedes existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{p}}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entonces $n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{q}{p}}$, obtenemos $\varepsilon > \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}}$; así, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ concluimos que $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p}{q}} < \varepsilon$.

Esto último dice que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = 0$.

**Teorema 8.2.1.** *Si una sucesión es convergente, su límite es único.*

*Demostración.* Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$. La demostración la realizaremos por reducción al absurdo, para ello supongamos que $L_1 \neq L_2$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ entonces para $\varepsilon = \frac{|L_1-L_2|}{2} > 0$ existirían $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_1$ y $|a_n - L_2| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N_2$.

Si consideramos $N = \max\{N_1, N_2\}$ entonces lasdos últimas afirmaciones se cumplen conjuntamente y tenemos

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| = \frac{1}{2}|L_1 - a_n + a_n - L_2| \leq \frac{1}{2}(|a_n - L_1| + |a_n - L_2|) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

esto último es una contradicción, de donde, el límite es único. □

**Definición 8.2.2.** Decimos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

**Teorema 8.2.2.** *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente entonces es acotada.*

*Demostración.* Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall\, n > n_0$.

Como $|a_n| - |L| \leq |a_n - L| < \varepsilon$ entonces $|a_n| < \varepsilon + |L| = M_1$. Por otro lado, existe $M_2 = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, así, si tomamos $M > \max\{M_1, M_2\}$ se cumple que $|a_n| < M$ para todo $n$. □

**Ejemplo 8.2.3.**

1. *$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada ya que existe $M = 1 \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{1}{n}\right| < 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*
2. *$(n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada ya que no existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|n| < M$.*

## 8.3. TEOREMAS Y EJEMPLOS

**Teorema 8.3.1. (Del acotamiento)** *Considere las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall\, n > n_0$ y además que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.*

*Demostración.* Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_1$, es decir $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

Si $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ entonces existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - L| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_2$, es decir $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$.

Como $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall\, n > n_0$ entonces tomando $N > \max\{n_1, n_2, n_0\}$ se cumple que $L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$, $\forall\, n \geq N$, esto último indica que $\lim_{n\to\infty} c_n = L$. □

**Ejemplo 8.3.1.** *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0.$

**Solución.** Como se cumple $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $-\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$, las expresiones que acotan a $\frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$ convergen a cero, entonces por el teorema del acotamiento obtenemos $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0$.

**Ejemplo 8.3.2.** *Demuestre que* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = 0.$

**Solución.** Como $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Por otro lado, podemos acotar $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ como sigue, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ de donde, como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ entonces, por el Teorema del Acotamiento concluimos que $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = 0$.

*Observación* 8.3.1.

1. Nuestro principal interés no es de verificar el límite usando la definición, sino que el de determinarlo; para ello necesitamos algo más de teoría.

2. Aceptamos la siguiente afirmación. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $f(n) = a_n$; si la función real $f$ tiene imagen $f(x)$ definida para $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ y si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Es inmediato que el siguiente Teorema no necesita de demostración, conforme sean conocidos en el Cálculo.

**Teorema 8.3.2.** *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$, *entonces*

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M.$

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = LM.$

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = kL,\ k \in \mathbb{R}.$

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty} k = k,\ k \in \mathbb{R}.$

*e)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M},\ M \neq 0.$

*f) Si* $a_n \geq 0$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 0.$

*g) Si* $a_n \geq b_n$ *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

*h)* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^n = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^n$.

*i)* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = sqrt \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

*j)* $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(a_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$.

**Ejemplo 8.3.3.** *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que* $a_n = \frac{n}{3n+2}$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 8.3.4.** *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{(3n+1)(2n-1)(n+2)}$.

**Solución.** Simplificando por $n^3$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^3}}{\frac{3n+1}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

**Ejemplo 8.3.5.** *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$.

**Solución.**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n^2}}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}}}}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 8.3.6.** *Calcule* $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{3}}$.

**Solución.**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{n+\frac{1}{3}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n+\frac{1}{3}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sqrt{n+\frac{1}{3}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\frac{1}{3}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 8.3.7.** *Calcule* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$.

**Solución.**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{k!}\right)\\
&= -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}-1\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 8.3.8.** *Determine* $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \text{ donde } a_n=\frac{1}{n^2}\cdot(x+1)^n.$$

**Solución.** Como

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a^n}\right| &= \left|\frac{1}{(n+1)^2}\cdot(x+1)^{n+1}\cdot\frac{n^2}{(x+1)^n}\right| \\ &= |x+1|\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}|x+1|\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \\ &= |x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \\ &= |x+1|.\end{aligned}$$

Imponiendo la condición tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Leftrightarrow |x+1| < 1 \Leftrightarrow x \in (-2,0) - \{1\}\,.$$

## 8.4. SUCESIÓN MONÓTONA Y EL NÚMERO *e*

**Definición 8.4.1.** Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión

a) monótona creciente si y sólo si $n > k \Rightarrow a_n \geq ak$.

b) monótona decreciente si y sólo si $n > k \Rightarrow a_n \leq a_k$.

**Teorema 8.4.1.** *Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente entonces es convergente.*

*Demostración.* Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente entonces existe supremo de la sucesión, supongamos que tal supremo es $\alpha = \sup(A)$ donde $A = \{a_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. Por la caracterización del supremo se cumple que $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, a_M \in A$ tal que $\alpha - \varepsilon < a_M \leq \alpha$, así, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que si $n > M$ entonces $\alpha - \varepsilon < a_M \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$, esta es precisamente la condición para que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. □

**Teorema 8.4.2.** *La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es convergente.*

*Demostración.* Demostraremos que la sucesión es creciente y acotada superiormente.

a) Acotamiento.

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{1}{n}\cdot n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}\\
&\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\
&= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}\\
&\quad+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}\\
&\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\\
&= 1+2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)<3.
\end{aligned}
$$

b) Acotamiento. Demostraremos que $a_n < a_{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= 1+\frac{1}{n}\cdot n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}\\
&\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\
&= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}.
\end{aligned}
$$

Análogamente tenemos

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\
&= 1+1+\frac{1-\frac{1}{n+1}}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}{3!}\\
&\quad+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Se nota fácilmente que los sumandos de $a_{n+1}$ son mayor o igual que los respectivos sumandos que forman $a_n$, así, $a_n < a_{n+1}$.

Como la sucesión es creciente y acotada superiormente entonces la sucesión es convergente y

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71826182\ldots$$

□

**Ejemplo 8.4.1.** *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^{2n}$.

**Solución.**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n\left(\frac{2}{3}\right)}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}.$$

## 8.5. EJERCICIOS RESUELTOS

**Ejercicio 8.1.** Compruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, $a\in\mathbb{R}^+$.

**Solución.** Si $a>1$ consideremos $x_n=\sqrt[n]{a}-1>0$ entonces $(1+x_n)^n=a$ y además,

$$a=(1+x_n)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot x_n^2+\cdots+x_n^n\geq 1+nx_n,$$

así se cumple $0<x_n\leq\frac{a-1}{n}$. Por el Teorema de Acotamiento y como $\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$ entonces $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=0$ de donde $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

Si $a<1$ sea $a'=\frac{1}{a}>1$ entonces $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=1$.
Si $a=1$ la proposición es inmediata.

**Ejercicio 8.2.** Compruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

**Solución.** Sea $x_n=\sqrt[n]{n}-1>0$ entonces

$$\begin{aligned} n &= (1+x_n)^n\\ &= 1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot x_n^2+\cdots+x_n^n\\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}\cdot x_n^2, \end{aligned}$$

así entonces $0\leq x_n\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0$ cuando $n\to\infty$; entonces

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)=0$$

de donde $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

**Ejercicio 8.3.** Compruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^k}=0$, $a>1$, $k>0$.

**Solución.** Si $k=1$ sea $a=1+h$, $h>0$, así,

$$0<\frac{n}{a^n}=\frac{n}{(1+h)^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\cdot h^2}=\frac{2}{(n-1)h^2}\to 0$$

cuando $n \to \infty$.

Si $k < 1$ entonces $0 < \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{n}{a^n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Si $k > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n} = 0$ ya que $a^{\frac{1}{k}} > 0$, así entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left[ \frac{n}{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n} \right]^k = 0.$$

## 8.6. EJERCICIOS PROPUESTOS

**Ejercicio 8.1.** Calcule usando el Teorema de acotamiento

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Resp. 0.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$ Resp. 0.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n + \operatorname{sen}(n)}{n - (-1)^n}$. Resp. 1.

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cos(n)}{n^2}$. Resp. 0.

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n + \cos(n)}{3^n}$. Resp. 0.

**Ejercicio 8.2.** Calcule:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3 + 7}}$. Resp. $\frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{3}{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$. Resp. 0.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right]$. Resp. $\frac{1}{2}$.

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[ \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + n} \right]$. Resp. $\frac{1}{2}$.

e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left( \frac{2n^4 + 3n^2 + 2}{5n^4 + 2n} \right)$. Resp. $\frac{2}{5}$.

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$. Resp. $\frac{1}{3}$.

g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left( \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right)$. Resp. $\frac{1}{2}$.

h) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Resp. 1.

i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$. Resp. 1.

j) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} \right]$.

k) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2n^2}$. Resp. $\frac{1}{2}$.

l) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$. Resp. $\frac{1}{2}$.

m) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+5+5^2+\cdots+5^n}{5^n+n}$. Resp. $\frac{5}{4}$.

n) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \left[ \sqrt[3]{8+\frac{2}{n}} - 2 \right]$. Resp. $\frac{1}{6}$.

o) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{4+16+\cdots+(2n)^2}{3n^3}$. Resp. $\frac{4}{9}$.

p) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}$. Resp. 5.

**Ejercicio 8.3.** Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

**Ejercicio 8.4.** Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ si $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Resp. $e$.

**Ejercicio 8.5.** Determine $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ para que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ donde $a_n = \frac{n!x^n}{n^n}$. Resp. $x \in (-e, e) - \{0\}$.

**Ejercicio 8.6.** Calcule

*a)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+3}$

*c)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+7}{2n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ *d)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{5n+4}\right)^{n}$

**Ejercicio 8.7.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $\forall\, n > 1$. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Resp. 2

**Ejercicio 8.8.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $\forall\, n > 1$. Determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Resp. $\infty$.

**Ejercicio 8.9.** Si $|r| < 1$ verifique que $\lim\limits_{n\to\infty} nr^n = 0$.

## 8.7. SERIES NUMÉRICAS

Presentaremos una aproximación intuitiva del tema, nos interesa decidir si una *serie* es o no convergente.

### Introducción

Una serie infinita es una expresión que tiene la forma $a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$ A las cantidades $a_1, a_2, ..., a_k, ...$ se les llama términos de la serie, a $a_k$ se le llama **término general**. En esta sección estudiaremos series cuyos términos son números reales. Por brevedad usaremos el símbolo $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ para representar la serie.

Las series infinitas se presentan con frecuencia en matemáticas y sus aplicaciones. Generalmente el primer término representa una aproximación inicial a una determinada cantidad de interés y los términos siguientes son correcciones sucesivas de esa aproximación, la suma termina cuando se ha alcanzado una exactitud suficiente.

No podemos asignar una suma a la serie tan sólo sumando todos los términos disponiendo de un tiempo finito para ello, al igual que en muchos campos de la matemática procederemos como sigue. Si hacemos que $S_n$ sea la suma de los primeros $n$ términos de la serie entonces

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, ..., S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Los números $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ forman una sucesión $\{S_n\}$ que se llama sucesión de sumas parciales de la serie. Si la sucesión de las sumas parciales tiene un límite cuando n tiende al infinito entonces, definimos a este valor límite como la suma de la serie.

**Definición 8.7.1.** Para la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$ se define la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales de modo que $S_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, n = 1, 2, 3, ....$
Decimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$ converge y que tiene suma $S$ si y sólo si la sucesión $\{S_n\}$ converge al límite $S$, en este caso se escribe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$, en otro caso decimos que la serie diverge.

**Ejemplo 8.7.1.** *Determinar si la serie* $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+(\frac{1}{3})^n+... = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k$ *converge, y en tal caso calcular su suma.*

**Solución.**

Debemos determinar el término $n$ de la sucesión de sumas parciales de la serie, tal término es $S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+(\frac{1}{3})^n$. Reconocemos la presencia de una Progresión Geométrica, con primer término 1, razón $\frac{1}{3}$ y $n+1$ sumandos, de donde $S_n = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$, ahora veamos el limite. Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$, entonces la serie converge a $\frac{3}{2}$.

## 8.8. SERIE GEOMÉTRICA

La Serie Geométrica $1+r+r^2+...+r^n+... = \sum_{k=0}^{\infty} r^k, r \neq 1$ se puede manejar como la serie del ejemplo anterior, tenemos $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}, r \neq 1$. Debemos analizar varios casos

Si $|r| < 1$ entonces $r^{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$, en consecuencia $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$.

Si $|r| > 1$ entonces $r^{n+1}$ es no acotada cuando $n \to \infty$, entonces $\{S_n\}$ diverge.

Si $r = -1$ entonces $S_n = \dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \begin{cases} 0\ n\ impar \\ 1\ n\ par \end{cases}$

Como $S_n$ oscila entre los dos valores 0 y 1, la sucesión $\{S_n\}$ diverge.

Si $r = 1$ no se aplica la formula de la Progresión Geométrica, sin embargo, en este caso cada término de la serie tiene valor 1 y entonces $S_n = n+1$, así, la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ diverge.

Resumiendo, la serie geométrica es tal que: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} converge\ a\ \frac{1}{1-r}\ si\ -1 < r < 1 \\ diverge\ si\ |r| \geq 1 \end{cases}$

**Ejemplo 8.8.1.** *Como una aplicación de lo anterior, si consideramos el número decimal periódico:* $x = 0,\overline{32}$ *entonces:*

$$S_n = \frac{32}{100} + \frac{32}{(100)^2} + \frac{32}{(100)^3} + ... + \frac{32}{(100)^n}$$

$$S_n = \frac{32}{100}\left\{1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + ... + \frac{1}{(100)^{n-1}}\right\},$$

*el paréntesis es una progresión Geométrica.*

$S_n = \dfrac{32}{100}\left\{\dfrac{1-(\frac{1}{100})^n}{1-\frac{1}{100}}\right\}$, *luego si*

$$n \to \infty \Rightarrow S_n \to \frac{32}{100}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right\} = \frac{32}{99}$$

*Así podemos sostener que* $\dfrac{32}{100} < 0,\overline{32} < \dfrac{32}{99}$

**Ejemplo 8.8.2.** *Determinar si converge la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$$

**Solución.**

Debemos estudiar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
Aplicando Fracciones Parciales y luego la propiedad telescópica tenemos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

de donde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, así la serie converge a 1.

**Ejemplo 8.8.3.** *Probar la convergencia encontrando su suma para la serie:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}$$

**Solución.**

$$(-1)^k \frac{2k+5}{(k+2)(k+3)} = (-1)^k\left\{\frac{A}{k+2} + \frac{B}{k+3}\right\}, A = 1, B = 1$$

luego

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2k+5}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\left\{\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) + ... \pm \left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{n+3}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+5}{(k+2)(k+3)}$ converge a $\frac{1}{2}$ o tiene suma $\frac{1}{2}$

**Ejemplo 8.8.4.** *Calcular la suma de*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-k-1}{k!}$$

**Solución.**

$$S_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-k-1}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{k(k-1)}{k!} - \frac{1}{k!} \right),$$

suma telescópica igual a

$$S_n = 2 - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2,$$

por lo tanto la suma de la serie es 2.

*Observación* 8.8.1. Desafortunadamente los ejemplos anteriores no son típicos ya que la definición que hemos estado aplicando para decidir la convergencia de algunas series, en general no suele ser de utilidad directa para descubrir si una serie converge o diverge, ya que, muchas veces no es posible determinar una fórmula útil para $S_n$. Debemos estudiar algunas propiedades generales de las series y algunos criterios que nos ayuden a determinar si una serie converge o diverge. Por otro lado, la definición declara que una serie converge a $S$ equivalentemente si la sucesión de sumas parciales converge a $S$ es decir si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Esto implica que: para $\varepsilon > 0$ dada, existe un entero positivo $N$, que depende de $\varepsilon$, tal que $|S_n - S| < \varepsilon$ siempre que $n > N$; reformulando lo anterior tenemos $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Esto dice que la convergencia de una serie se manifiesta cuando el residuo, después de los n primeros términos es arbitrariamente pequeño, note que los primeros términos de la serie no son considerados.

**Teorema 8.8.1.** *Si la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente entonces* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

*Demostración.* Para $k$ grande, $a_k = S_k - S_{k-1}$ entonces $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1})$

Si $S$ es suma de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ entonces $\lim_{k\to\infty} S_k = S$,

de donde $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = S - S = 0$ $\square$

**Corolario 8.8.1.** *Si en la serie* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ocurre que* $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ *entonces la serie diverge.*

*Observación* 8.8.2. El empleo principal del teorema consiste en establecer la divergencia de la serie.

**Ejemplo 8.8.5.** *Analizar la convergencia de la serie*

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{17}+\frac{1}{20}+...+\frac{n}{2n+1}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k+1}$$

**Solución.**
Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$ entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2k+1}$ diverge.

**Ejemplo 8.8.6.** *Analizar la convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2^{1-\frac{1}{2^k}}$

**Solución.** Por el criterio de la condición necesaria y como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{1-\frac{1}{2^n}=2}\neq 0$, la serie diverge.

**Ejemplo 8.8.7.** *Determinar si la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ *converge o diverge.*

**Solución.**
La serie propuesta se conoce como la **serie armónica**. Se puede demostrar que tal serie diverge, para ello se muestra que las sumas parciales se hacen no acotadas.

**Teorema 8.8.2.** *Si las series* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ *son convergentes a las sumas* $S$ *y* $W$ *respectivamente entonces la combinación lineal* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(pa_k+qb_k)$ *también es convergente y su suma es* $pS+qW; p,q\in\mathbb{R}$

*Demostración.* inmediata. □

*Observación* 8.8.3. No es cierto, en general, el reciproco del teorema, la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(pa_k+qb_k)$ no asegura la convergencia de las series $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$. Por ejemplo, se demostró que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ converge, y sabemos que las series armónicas $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$ divergen.

**Teorema 8.8.3.** *Si la serie* $\sum a_n$ *es de términos no negativos entonces, ella converge si y solo si su sucesión* $\{S_n\}$ *es acotada.*

*Demostración.* Sabiendo que $\{S_n\}$ es monótona creciente ella converge si y solo sí es acotada superiormente como se ha observado en el tema de sucesiones. □

*Observación* 8.8.4. Para el trabajo posterior de análisis de la convergencia de las series, se hace necesario conocer algunas por lo que a **la serie geométrica**, debemos agregar sin justificar por el momento la llamada **serie p**:

a) $\sum a^n$ converge para $|a| < 1$ y diverge para $|a| \geq$, con $a$ llamada **la razón de la serie**.

b) $\sum \frac{1}{n^p}$, converge si $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$

## 8.9. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

### 8.9.1. Criterio de Comparación

**Teorema 8.9.1.** *Si* $0 < a_k \leq b_k; \forall k$ *entonces*

*a) Si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *es convergente entonces* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente.*

*b) Si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es divergente entonces* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *es divergente.*

*Demostración.* Sean $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ las sumas parciales de las dos series. Sabemos que $W_n$ tiene limite, por ejemplo $B$, cuando $n \to \infty$. Necesitamos demostrar que también converge la sucesión $\{S_n\}$. Como $a_k > 0$ entonces $\{S_n\}$ es monótona creciente, además $0 < S_n \leq W_n < B$, de manera que $\{S_n\}$ es acotada, por lo tanto $\{S_n\}$ converge, de donde, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. La otra parte del teorema es análoga. $\square$

*Observación* 8.9.1. Nótese que en este criterio no se conoce la suma de la serie y la aplicación de él supone de algún modo una presunción de convergencia o divergencia para poder determinar la comparación.

**Ejemplo 8.9.1.** *Probar la convergencia de un número decimal infinito por comparación con una serie geométrica.*

**Solución.**

Si denotamos un decimal infinito cualesquiera como:

$$n = e, d_1 d_2 d_3 .........d_n.........; 0 \leq d_i \leq 9$$

si lo escribimos como una serie:

$$n = e + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + ......... + \frac{d_n}{10^n} + .......$$

Si

$$S_n = e + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + ......... + \frac{d_n}{10^n}$$

$$S_n \leq e + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + ......... + \frac{9}{10^n}$$

$$\Rightarrow S_n \leq e + \frac{9}{10}\left\{1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ......... + \frac{1}{10^n}\right\}$$

(progresión geométrica), o sea:

$S_n \leq a + \dfrac{9}{10}\left(\dfrac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}\right)$, si $n \to \infty$, la serie mayorante converge a $a + 1$, luego la sucesión $\{S_n\}$ converge y por ello la serie decimal infinito converge. Este resultado incluye como caso particular a un número decimal periódico.

**Ejemplo 8.9.2.** *Discutir la convergencia de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \sin k}{k^2}$

**Solución.** Como $-1 \leq \sin k \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin k \leq 3$ entonces $0 \leq \frac{2+\sin k}{k^2} \leq \frac{3}{k^2}$. Como la serie mayorante $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2}$ es una serie $p$ con $p > 1$ es convergente, por comparación lo será la propuesta.

**Ejemplo 8.9.3.** *Analizar por comparación la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}$

**Solución.** Sabiendo que: $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{2^k}{k}$ y como la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge como serie $p$ con $p = 1$, también por comparación lo hará la propuesta.

**Ejemplo 8.9.4.** *Estudiar la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ....$

**Solución.** Como $k!$ crece extremadamente rápido, es razonable creer que la serie converge. Dado que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot .... \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$ y como la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$ converge, por ser una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2} < 1$, la nuestra también converge.

**Ejemplo 8.9.5.** *Analizar la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*, con* $a_k = \left[\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}\right]$

**Solución.** Como presumimos que podría ser divergente y $a_k > \left[\frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{2\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}}\right]$ entonces $a_k > \frac{1}{\sqrt{k}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} \geq \frac{1}{\sqrt{k}\left[1 - \frac{3}{4}\right]} \Rightarrow a_k > \frac{1}{4\sqrt{k}}$ y como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, (serie $p < 1$), lo mismo pasa con la serie mayor $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Ejemplo 8.9.6.** *Probar que la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k^2 + k}}$ *es divergente.*

**Solución.** $\dfrac{\ln k}{\sqrt{k(k+1)}} = \dfrac{\ln k}{k} \cdot \dfrac{k}{\sqrt{k(k+1)}} = \dfrac{\ln k}{k} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}} \geq \dfrac{\ln k}{k} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ Pero $\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}$, y como la serie armónica diverge, también lo hace $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\ln k}{k}$ y por lo tanto la serie propuesta, según el criterio de comparación.

**Ejemplo 8.9.7.** *Analizar por comparación la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{k})$

**Solución.** Teniendo como referencia la identidad $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ entonces $1-\cos\dfrac{\pi}{n} = 2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}$ y como $2\sin^2\dfrac{\pi}{2k} < 2\dfrac{\pi^2}{4k^2} < \dfrac{\pi^2}{k^2}$ y como la serie $p$ $\pi^2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$ es convergente, lo será la serie propuesta.

### 8.9.2. Criterio de Comparación por límite

**Teorema 8.9.2.** *Sean las series* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$*, ambas de términos positivos.*
*Si* $0 < \displaystyle\lim_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} < \infty$ *entonces las series tienen el mismo comportamiento.*

*Demostración.* Supongamos que $0 < \displaystyle\lim_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = L < \infty$ y que converge.
Como $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = L$ entonces para valores grandes de $k$, digamos $k \geq K_2$, tenemos $\dfrac{a_k}{b_k} \leq 2L$ es decir $a_k \leq 2Lb_k$. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2Lb_k = 2L\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ converge por tanto también converge la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. □

*Observación* 8.9.2. Para complementar el criterio anterior se tiene:

a) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = \infty$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ diverge entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ diverge. En efecto, del hecho que $\frac{a_k}{b_k} > M$ y como $a_k > Mb_k$, la conclusión es clara.

b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = 0$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ converge entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge.
En efecto puesto que $\dfrac{a_k}{b_k} < \varepsilon; \forall n > n_0$ y $\varepsilon$ dado, entonces $a_k < \varepsilon b_k$ y la comparación ratifica lo enunciado.

**Ejemplo 8.9.8.** *Aplicando comparación, analizar la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)k}}$.

**Solución.** El uso de este criterio presupone una cierta sospecha de su conducta para elegir la serie con la que se va a comparar, en este caso el término general es muy parecido a $\frac{1}{k}$ de ahí la comparación con la serie divergente $b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(2k+1)k}} : \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{2k^2+k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$, entonces la serie propuesta es también divergente.

**Ejemplo 8.9.9.** *Analizar la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+1}}$

**Solución.** La cercanía con la serie $p$ convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$, nos lleva a la comparación de ambas: $\lim_{k\to\infty} \frac{k^{\frac{2}{3}}}{(k^2+1)^{\frac{1}{3}}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1$, luego la serie es convergente.

**Ejemplo 8.9.10.** *Analizar la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k3^{k-1}}$.

**Solución.** La comparación con la que se insinúa es con $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$, geométricamente convergente cuya razón es menor que 1. $\lim_{k\to\infty} \frac{3^k}{k3^{k-1}} = 0$, luego la serie es convergente en virtud de la observación b) anterior.

### 8.9.3. Criterio de la raíz de Cauchy

**Teorema 8.9.3.** *Para una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *de términos no negativos y* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_k} = l$ *se cumple:*

*a) Si* $l < 1$*, la serie es convergente.*

*b) Si* $l > 1$*, la serie es divergente.*

*c) Si* $l = 1$*, no hay información, pudiendo ser ó convergente ó divergente.*

*Demostración.*

a) Como $0 < l < 1$, consideremos el número $r \in (l, 1)$, por lo que existirá, en el trayecto hacia $l$, el natural $n_0$, tal que $\forall n > n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < r$ ó $a_n < r^n$, y como $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ es una serie geométrica convergente, la comparación señala que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

b) Como $0 < 1 < l$, podemos considerar el número $r \in (1, l)$, luego existirá $n_0 \ni \forall n > n_o \sqrt[n]{a_n} > r \Rightarrow a_n > r^n$, y como la serie $\sum r^n$ es divergente, la serie $\sum a_n$, lo será.

$\square$

**Ejemplo 8.9.11.** *Estudie la convergencia de la serie* $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + ... + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + ...$

**Solución.** Aplicando el criterio de Cauchy tenemos

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$, así, la serie converge.

**Ejemplo 8.9.12.** *Determinar la convergencia de la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln k}\right)^k$

**Solución.** Que el término general de la serie tenga exponente $n$, invita a aplicar este criterio: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$, por lo tanto la serie converge.

### 8.9.4. Criterio de la razón de D'Alambert

**Teorema 8.9.4.** *Para la serie de términos no negativos* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = L$

*a) Si* $L < 1$, *la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente.*

*b) Si* $L > 1$, *la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es divergente.*

*c) Si* $L = 1$, *no hay información.*

*Demostración.*

a) Al igual que en el criterio anterior ,si $L < 1$,definimos el número $r = \frac{1}{2}(1 + L)$, de modo que existirá $k_0 \in \mathbb{N}, \ni \forall k > k_0 \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < r$, es decir, $\frac{a_k}{a_{k-1}} < r$, con ello podemos establecer que

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} \cdot ... \cdot \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \cdot a_{k_0} \leq (r \cdot r \cdot r \cdot ... \cdot r)a_{k_0} = r^{k-k_0} \cdot a_{k_0}$$

Pero como la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-k_0}$ converge como una serie geométrica, la serie menor también lo hará.

b) Si $L > 1$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \Rightarrow a_{k+1} > a_k$, es decir la sucesión es creciente de modo que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, por lo que la serie es divergente.

□

**Ejemplo 8.9.13.** *Analizar la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$

**Solución.**

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{3^k k!} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{3(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k} = \frac{3}{e} > 1,$$

¡Diverge!.

**Ejemplo 8.9.14.** *Analizar la serie:* $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + ... + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k}{3\cdot 5\cdot 7\cdot ...\cdot(2k+1)}$

**Solución.** Como $\displaystyle a_k = \frac{k!\cdot(1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2k)}{(3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot ...\cdot(2k+1))(1\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot kn)} = \frac{(k!)^2\cdot 2^k}{(2k+1)!}$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!^2\cdot 2^{k+1}}{(2k+3)!} \frac{(2k+1)!}{k!^2\cdot 2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)^2}{(2k+2)(2k+3)} = \frac{1}{2}$, luego la serie converge.

### 8.9.5. Criterio de la Integral

**Teorema 8.9.5.** *Si se tiene una serie de términos no negativos* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*, y una función real* $f(x)$*, continua y monótona no creciente en* $[1,\infty)$ *tal que* $f(x) = a_k$*. Entonces la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y la integral* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$*, ambas convergen ó ambas divergen.*

*Demostración.* La dirección que más nos importa es el análisis de convergencia o divergencia de la integral para deducir el comportamiento de la serie.

$$f(1) = a_1 > f(2) = a_2 > ... > f(k) = a_k > ...$$

en el intervalo: $k < x < k+1 \Rightarrow a_k = f(k) > f(x) > f(k+1) = a_{k+1}$.
Integrando,
$\displaystyle\int_k^{k+1} a_k dx > \int_k^{k+1} f(x)dx > \int_k^{k+1} a_{k+1}dx$, $a_k > \int_k^{k+1} f(x)dx > a_{k+1}$, ahora sumando en $k$ obtenemos $\displaystyle\sum_1^{n-1} a_k > \int_1^n f(x)dx > \sum_1^n a_{k+1} \Leftrightarrow S_{n-1} - S_1 > \int_1^n f(x)dx > S_n - S_1$.
Si la integral converge, por el segundo miembro de la desigualdad la sucesión es acotada por lo tanto convergente y así también la serie. Pero si la integral diverge, el primer miembro establece que la sucesión de sumas parciales no es acotada y por lo tanto diverge al igual que la serie. □

**Ejemplo 8.9.15.** *Probar la divergencia de la serie armónica* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

**Solución.** La función continua y decreciente que se identifica con el término general de la serie será $f(x) = \frac{1}{x}$ por lo tanto $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$, luego la integral diverge y por lo tanto la serie armónica.

**Ejemplo 8.9.16.** *Analizar serie p:* $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, p > 0$

**Solución.** Si consideramos la función real continua y decreciente: $f(x) = \frac{1}{x^p}$

$$\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right]_1^N = \frac{1}{1-p}(N^{1-p} - 1); p \neq 1 \\ (\ln x]_1^N = \ln N; p = 1 \end{cases}$$

Hacemos que $n$ tienda a infinito y estudiaremos la convergencia de la integral impropia.

Si $p > 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$; la integrla es finita y la serie converge.

Si $p < 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$; la integral es infinita y la serie diverge.

Si $p = 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$; la integral es infinita y la serie diverge.

**Ejemplo 8.9.17.** *Analizar con el criterio de la integral la convergencia de la serie:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$$

**Solución.** La función continua y decreciente es $f(x) = xe^{-x^2}$ y como la integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2} dx$, converge a $\frac{1}{e}$ entonces la serie también converge.

### 8.9.6. Criterio de Leibnitz, para series alternantes

**Teorema 8.9.6.** *Si* $b_1 \geq b_2 \geq ... > 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + ...$ *es convergente.*

*Demostración.* Se demostrará que la sucesión de sumas parciales de la serie es acotada superiormente y por lo tanto convergente y ello implica la convergencia de la serie. Consideremos la suma de un número impar de términos:

$$S_{2n-1} = (b_0 - b_1) + (b_2 - b_3) + ... + (b_{2n-2} - b_{2n-1}),$$

los paréntesis son positivos.

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (b_{2n} - b_{2n-1}) \rightarrow S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$
$$\therefore \{S_{2n-1}\}$$

es creciente, por otra parte, como

$$S_{2n-1} = b_0 - (b_1 - b_2) - (b_3 - b_4) - ... - (b_{2n-3} - b_{2n-2} - b_{2n-1})$$

y como cada paréntesis es positivo se tiene que

$$S_{2n-1} \leq b_0,$$

entonces la sucesión es acotada superiormente. Por otra parte: $S_{2n} = S_{2n-1} + b_{2n}$. Luego si $n \rightarrow \infty$ entonces $b_{2n} \rightarrow 0$ con lo que se determina la convergencia de $\{S_n\}$. □

**Ejemplo 8.9.18.** *Verificar la convergencia de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$

**Solución.** Como la sucesión de término general $b_n = \frac{1}{n}$ es decreciente y además $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ es convergente.

**Ejemplo 8.9.19.** *Demostrar que la serie alternada* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} + ...$ *es convergente.*

**Solución.** Usemos el criterio de Leibnitz. Debemos verificar que la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{2n-1}$ es decreciente. Como $a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1} = a_n$ entonces la sucesión es decreciente. Además, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ entonces la serie es convergente.

**Definición 8.9.1.** Una serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice que es **absolutamente convergente**, si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente y se dirá **condicionalmente convergente** cuando $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, pero $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es divergente.

**Teorema 8.9.7.** *si la serie* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *converge entonces converge* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

*Demostración.* Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge entonces $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni$ si

$n > n_0 \Rightarrow \left|\displaystyle\sum_{n+1}^{n+p} |a_n|\right| = ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + ... + |a_{n+p}|| < \varepsilon$, como

$|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+p}| \leq \displaystyle\sum_{n+1}^{n+p} |a_n| < \varepsilon$ entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. □

**Ejemplo 8.9.20.** *La serie de términos positivos y negativos* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ *es condicionalmente convergente, ya que la serie formada por los valores absolutos de sus términos, converge.*

**Ejemplo 8.9.21.** *La serie de términos positivos y negativos* $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$ *es absolutamente convergente, ya que la serie formada por los valores absolutos de sus términos,*

## 8.10. EJERCICIOS PROPUESTOS

**Ejemplo 8.10.1.** *Decidir la convergencia de las siguientes series:*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2-1}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{k(k+1)}{(k-2)(k-3)}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^3}$

*d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{3^k}$

**Ejemplo 8.10.2.** *Encontrar la suma de las series*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+5}{(k^2-1)(k+2)}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2(k+2)}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+12}{k^3+5k^2+6k}$

**Ejemplo 8.10.3.** *Analizar la convergencia de*

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$$

**Ejemplo 8.10.4.** *Determine si convergen*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

**Ejemplo 8.10.5.** *Usando el criterio de comparación, analizar las series:*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2(k-1)}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}$

**Ejemplo 8.10.6.** *Con el criterio de la integral estudiar:*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^2+1}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan k}}{1+k^2}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$

*d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k^2+1)^2}$

**Ejemplo 8.10.7.** *Con el criterio de la razón analizar:*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k(k+1)(k+2)}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k-1)}$

**Ejemplo 8.10.8.** *Con el criterio de la Cauchy analizar:*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

**Ejemplo 8.10.9.** *Analizar las series alternantes:*

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kk+1}$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k+1}$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+2)}{2k+1}$

**Ejemplo 8.10.10.** *Analizar la convergencia de las siguientes series:*

*a)* $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} + ...$

*b)* $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + ...$

*c)* $1 + \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... + \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} + ...$

*d)* $\dfrac{2}{1} + \dfrac{2^2}{2} + \dfrac{2^3}{3} + ... + \dfrac{2^n}{n} + ...$

*e)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k}$

*f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{(k+1)(k-1)(k+2)}$

*g)* $\dfrac{2}{5} + (\dfrac{4}{7})^2 + (\dfrac{6}{11})^3 + ... + (\dfrac{2n}{3n+1})^n + ...$

*h)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)k!}{4^k}$

*i)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k^2}}{(k+1)^{k^2}}$

*j)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(3k+1)(2k+3)}$

*k)* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \ln k}{k}$