ÍNDICE

CAPÍTULO 9
MATRICES

Recordaremos algunos características de las matrices y daremos, especial énfasis, a las operaciones elementales tanto como al escalonamiento de matrices.

Esto nos permitirá determinar matrices inversas y, posteriormente, resolver sistemas de ecuaciones lineales y aplicaciones al Algebra Lineal.

9.1. DEFINICIÓN Y NOTACIONES

Definición 9.1.1. Sean $I = [1, n]$, $J = [1, m]$ intervalos cerrados de $(\mathbb{N}, \leq)$. Se llama matriz de tipo (n, m) o matriz de tamaño n por m sobre el cuerpo K, a toda función del tipo

$$A : I \times J \to K \ \text{ tal que } \ (i, j) \to A((i, j)) = a_{ij}.$$

Observación 9.1.1.

1. Como existen nm imágenes a_{ij} por la función A, esta función se puede describir completamente disponiendo las imágenes en un arreglo rectangular de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2. Distinguimos n filas y m columnas.

   La i-ésima fila es la sucesión $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}\}$.

   La j-ésima columna es la sucesión $\{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}\}$.

3. El arreglo rectangular tiene como único elemento que pertenece a la i-ésima fila, j-ésima columna al elemento a_{ij}.

4. Por abuso de lenguaje podemos identificar la función matriz A con su imagen escribiendo
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
o más brevemente, $A = (a_{ij})$ con $(i, j) \in I \times J$.

5. Nos interesan, especialmente, las matrices definidas en el cuerpo de los números reales, al conjunto de todas las matrices reales de tamaño nm lo denotamos por $M(n, m, \mathbb{R})$.

Ejemplo 9.1.1. *Considere la matriz $A = (a_{ij}) \in M(2, 3, \mathbb{R})$ tal que*
$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & si \ \ i \geq j \\ j^i & si \ \ i < j \end{cases}$$
entonces
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
ya que, por ejemplo, $a_{11} = 1 + 1 = 2$, $a_{13} = 3^1 = 3$.

9.2. OPERACIONES CON MATRICES

Definición 9.2.1. Sean $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$ tal que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces
$$A = B \;\Leftrightarrow\; a_{ij} = b_{ij} \quad \forall\,(i, j) \in I \times J.$$

Ejemplo 9.2.1. *Determine los números reales x e y, si*
$$\begin{pmatrix} 3 & 2x+1 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \\ y-2 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 7 \\ -9 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución. Usando la definición de igualdad de matrices obtenemos
$$\begin{cases} 2x + 1 = & 6 \\ y - 2 = & -9 \end{cases}$$
de donde $x = \frac{5}{2}$, $y = -7$.

Definición 9.2.2. Sean $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$ tal que $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces, definimos la suma de matrices como

$$A + B = C = (c_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R}) \text{ tal que } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i, j.$$

Proposición 9.2.1. *En $M(n, m, \mathbb{R})$ se cumple,*

a) $A + (B + C) = (A + B) + C \quad \forall\, A, B, C \in M(n, m, \mathbb{R})$.

b) Existe $0 \in M(n, m, \mathbb{R})$ *tal que* $A + 0 = 0 + A = A \quad \forall\, A \in M(n, m, \mathbb{R})$.

c) Si $A \in M(n, m, \mathbb{R})$ *entonces existe* $-A \in M(n, m, \mathbb{R})$ *tal que* $-A + A = A + -A = 0$, $\forall\, A \in M(n, m, \mathbb{R})$.

d) $A + B = B + A \quad \forall\, A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$.

Observación 9.2.1.

1. La matriz O cuya existencia garantiza 9.2.1 b) es única. La matriz nula $0 = (z_{ij})$ es tal que $z_{ij} = 0$, $\forall\, i, j$.
2. La matriz $-A$ cuya existencia garantiza 9.2.1 c) es única. La matriz $-A$ se llama matriz opuesta de $A = (a_{ij})$ y es tal que $-A = (-a_{ij})$, $\forall\, i, j$.
3. Las propiedades se pueden demostrar usando la definición de igualdad en las matrices y las propiedades de la suma en $\mathbb{R}$.

Definición 9.2.3. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{R}$ entonces $kA = (c_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$ donde $c_{ij} = ka_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Observación 9.2.2. kA es la ponderación de la matriz A por el escalar k y se cumple

1. $1A = A$; $\forall\, A \in M(n, m, \mathbb{R})$, $1 \in \mathbb{R}$.
2. $k(A + B) = kA + kB$; $\forall\, A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$; $\forall\, k \in \mathbb{R}$.
3. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$; $\forall\, A \in M(n, m, \mathbb{R})$; $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.
4. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$; $\forall\, A \in M(n, m, \mathbb{R})$; $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Definición 9.2.4. Sean $A = (a_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in M(m, p, \mathbb{R})$ entonces definimos el producto de matrices como

$$AB = C = (c_{ij}) \in M(n, p, \mathbb{R}) \qquad \text{tal que} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}.$$

Observación 9.2.3. El elemento c_{ij} que pertenece a la i-ésima fila, j-ésima columna de AB es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj},$$

se obtiene "multiplicando la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B".

Proposición 9.2.2. *Se cumple:*

a) *En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir,* $AB \neq BA$.

b) $A(BC) = (AB)C$ *donde* A, B, C *son matrices conformes.*

c) $A(B + C) = AB + AC$ *donde* A, B, C *son matrices conformes.*
(A, B, C *son matrices conformes cuando tienen los tamaños adecuados para operar entre ellas)*

Demostración.

a) Si consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

entonces, si $AB = C = (c_{ij})$, $BC = D = (d_{ij})$ tenemos que

$$c_{11} = (1)(5) + (2)(7) = 19 \quad \text{y} \quad d_{11} = (5)(1) + (6)(3) = 23$$

así, $AB \neq BA$.

b) y c) lo demuestran ustedes.

□

9.3. MATRICES CUADRADAS

Si una matriz es de tamaño n por n entonces ella es una matriz cuadrada de tamaño n y al conjunto que las contiene lo denotamos $M(n, \mathbb{R})$.

Proposición 9.3.1. *El conjunto* $M(n, \mathbb{R})$ *con la suma y la multiplicación es un anillo no conmutativo con unidad.*

Demostración. Debemos demostrar que el trío $(M(n, \mathbb{R}), +, \cdot)$ es tal que

1) $(M(n, \mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano.

2) La multiplicación es una operación binaria interna que cumple

a) $A(BC) = (AB)C, \ \forall A, B, C \in M(n, \mathbb{R})$.

b) $A(B + C) = AB + AC, \ \forall A, B, C \in M(n, \mathbb{R})$.

3) En general $AB \neq BA$.

4) Existe $Id_n \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $Id_n \cdot A = A \cdot Id_n = A, \ \forall A \in M(n, \mathbb{R})$.

Los puntos 1), 2) y 3) ya se conocen en $M(n, m, \mathbb{R})$, estudiemos el punto 4).

La matriz identidad en las matrices de tamaño n es $Id_n = (\delta_{ij})$ donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

demostremos que $A \cdot Id_n = A$.

Sea $A \cdot Id_n = B = (b_{ij})$, debemos demostrar que $b_{ij} = a_{ij} \ \forall\, i, j$,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}\delta_{kj} + a_{ij}\delta_{jj} + \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}$$

ya que la primera suma tiene valor cero puesto que $\delta_{kj} = 0, \ \forall\, k \neq j$, esto también ocurre para la ultima sumatoria. □

Observación 9.3.1. Si bien es cierto que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa, podemos encontrar las infinitas matrices que conmutan con una matriz dada.

Ejemplo 9.3.1. *Determine todas las matrices que conmutan con*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}).$$

Solución. Sea $B = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$, imponiendo la condición obtenemos $AB = BA$, así,

$$\begin{aligned} AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x - z & y - w \\ 2z & 2w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & -x + 2y \\ z & -z + 2w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = x \\ y - w = -x + 2y \\ 2z = z \\ 2w = -z + 2w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = x - w \end{cases}$$

así,

$$B = \begin{pmatrix} x & x-w \\ 0 & w \end{pmatrix} \qquad x, w \in \mathbb{R},$$

luego, el conjunto formado por todas de las matrices que conmutan con $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ es

$$\left\{ B \,/\, B = \begin{pmatrix} x & x-w \\ 0 & w \end{pmatrix} \; x, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observe que, dando valores a las variables x, w podemos determinar algunas matrices que conmutan inmediatamente con la matriz A; como son la propia matriz A, la matriz nula y la matriz identidad. La misma matriz A se obtiene cuando $x = 1$, $w = 2$; la matriz identidad, la obtenemos cuando $x = w = 1$ y la matriz nula la obtenemos cuando $x = w = 0$.

Otra matriz es, por ejemplo, $B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

9.3.1. Matrices no singulares

Hemos visto que, en general la multiplicación no es conmutativa, y que, sin embargo, existen matrices que conmutan con otras; más aún, si $A \in M(n, \mathbb{R})$, es posible que exista una matriz $B \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $AB = BA = Id_n$, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 9.3.1. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, si existe una matriz $B \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $AB = BA = Id_n$ entonces decimos que B es una matriz inversa de A.

Observación 9.3.2.

1. No toda matriz cuadrada admite inversa, por ejemplo, la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$ no tiene inversa ya que no existe una matriz $B = \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$ tal que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Cuando una matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$ admite inversa, esta es única.

   En efecto, si $B, C \in M(n, \mathbb{R})$ son ambas inversas de la matriz A entonces $AB = BA = Id_n$ y además $AC = CA = Id_n$. De aquí tenemos que

$$B = B \cdot Id_n = B(AC) = (BA)C = Id_n \cdot C = C.$$

   Denotamos por A^{-1} a la matriz inversa de A.

Ejemplo 9.3.2. *Determine A^{-1}, si existe, para $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

Solución. Sea $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, entonces, imponiendo la condición de inversa tenemos $A^{-1}A = AA^{-1} = Id_2$.

De $A^{-1}A = Id_2$ conseguimos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

esto indica que

$$\begin{pmatrix} 3a+b & 2a+b \\ 3c+d & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto conseguimos el sistema

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 2a+b=0 \\ 3c+d=0 \\ 2c+d=1 \end{cases}$$

cuya solución es

$$a=1\,,\quad b=-2\,,\quad c=-1\,,\quad d=3.$$

Así $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Usted debe verificar que $AA^{-1} = Id_2$.

Observación.

1. Para el caso $n=2$ obtenemos la siguiente fórmula que nos entrega, directamente, la inversa
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}\,, \text{ con } \quad ad-bc \neq 0.$$
2. Si el tamaño de la matriz es 3 entonces generaríamos un sistema con 9 incógnitas, suficiente para desalentarnos. Pronto al interior de este capítulo, usando operaciones elementales calcularemos la inversa de manera más directa.

Algunas propiedades

1. Si la matriz A es invertible (no singular) entonces $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. Si A, B son invertibles entonces AB y BA son invertibles y se cumple
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{ y } (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$
3. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ A, B, C invertibles.

Demostración.

2. Si logramos probar que, tanto $(AB)^{-1}$ como $B^{-1}A^{-1}$ son inversas de otra matriz entonces, por la unicidad de la inversa concluimos que estas son iguales, tal matriz es AB, veámoslo.

   Es inmediato que $(AB)(AB)^{-1} = (AB)^{-1}(AB) = Id_n$, por otro lado

   $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = \left[(AB)B^{-1}\right]A^{-1} = \left[A\left(BB^{-1}\right)\right]A^{-1} = (A{\cdot}Id_n)A^{-1} = AA^{-1} = Id_n$,

   análogamente se puede demostrar que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = Id_n$

3. Usando 2. tenemos que

$$(ABC)^{-1} = [A(BC)]^{-1} = (BC)^{-1}A^{-1} = \left(C^{-1}B^{-1}\right)A^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

□

9.3.2. Potencias de Matrices Cuadradas

Definición 9.3.2. Sea $A \in M(n,\mathbb{R})$ entonces A^n, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ es tal que

$$A^n = \begin{cases} Id_n & \text{si } n = 0 \\ A^{n-1}A & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Observación 9.3.3. Si $A \in M(n,\mathbb{R})$, $p, q \in \mathbb{N}$ entonces se cumple

a) $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$.

b) $(A^p)^q = A^{pq}$.

Demostración.

a) Realizaremos la demostración por inducción sobre q manteniendo fijo el valor de p.

   Sea $P(q) : A^p \cdot A^q = A^{p+q}$, debemos demostrar:

   i) $P(1)$ es V.
   ii) Si $P(k)$ es V entonces $P(k+1)$ es V.

   i) $P(1)$ es V ya que $A^p \cdot A = A^{p+1}$.
   ii) Si $P(k)$ es V, es decir, si $A^p \cdot A^k = A^{p+k}$, debemos demostrar que $A^p \cdot A^{k+1} = A^{p+(k+1)}$. Veámoslo

$$A^p \cdot A^{k+1} = A^p(A^kA) = (A^pA^k)A = (A^{p+k})A = A^{(p+k)+1} = A^{p+(k+1)}$$

□

Ejemplo 9.3.3. *Sean* $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ *matrices tales que* $AB = BA$*, demuestre que* $A^2B = BA^2$*.*

Solución. $A^2B = (AA)B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A = B(AA) = BA^2$.

Ejemplo 9.3.4. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}),\ a \neq 0.$$

Determine una fórmula para A^n*,* $n \in \mathbb{N}$ *y demuestre la validéz de dicha fórmula en los naturales.*

Solución.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

Es fácil deducir que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Demostremos ahora, por inducción, la validez de la fórmula. Sea

$$P(n) : A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix},$$

a) $P(1)$ se cumple ya que

$$A^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 1a^{1-1} \\ 0 & a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

b) Si $A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ debemos demostrar que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$. Veámoslo,

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^k + ka^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9.3.5. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$*. Determine*

a) A^n*,* $n \in \mathbb{N}$*, verifique la fórmula por inducción.*

b) Determine $\sum\limits_{i=1}^{n} A^i$*.*

Solución.

a)
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

podemos deducir que
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1}A;$$

la inducción se verifica fácilmente.

b)
$$\sum_{i=1}^{n} A^i = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}A = A\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = (2^n - 1)A.$$

Ejemplo 9.3.6. *Considere la familia de matrices* $M = aId_2 + bB,\ a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

a) Determine B^n.

b) Determine M^n.

Solución.

a) Es inmediato obtener
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \forall\, n \geq 2.$$

b) Como A y Id_2 conmutan, entonces podemos aplicar el Teorema del Binomio, obtenemos,
$$\begin{aligned} M^n = (aId_2 + bB)^n &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} Id_2^{n-p} b^p B^p \\ &= \binom{n}{0} a^n Id_2^n + \binom{n}{1} a^{n-1} Id_2^{n-1} bB \\ &= a^n Id_2 + na^{n-1}bB \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9.4. MATRICES ESPECIALES

Mostraremos algunos tipos de matrices que aparecen con mucha frecuencia en las aplicaciones de las matrices en las Ciencias Aplicadas.

Definición 9.4.1. Considere la matriz $Id_n \in M(n, \mathbb{R})$, decimos que la matriz B es una matriz escalar si $B = \alpha Id_n$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplo 9.4.1. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$ *es una matriz escalar ya que* $B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Observación 9.4.1. Si $B \in M(n, \mathbb{R})$ es una matriz escalar entonces conmuta con $A \in M(n, \mathbb{R})$, $\forall\, A$.

Definición 9.4.2. $A \in M(n, \mathbb{R})$ se llama matriz idempotente si y sólo si $A^2 = A$.

Ejemplo 9.4.2. *Se puede verificar, con facilidad, que las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

son idempotentes.

Observación 9.4.2. A idempotente $\Rightarrow A^n = A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definición 9.4.3. $A \in M(n, \mathbb{R})$ se llama matriz nilpotente de grado p si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^p = 0$ y $A^{p-1} \neq 0$.

Ejemplo 9.4.3. *Usted puede verificar que*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$$

es nilpotente de grado 3.

9.4.1. Matriz Traspuesta

Definición 9.4.4. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$, definimos la matriz traspuesta de A, denotada A^t como $A^t = (a^t_{ij}) \in M(m, n, \mathbb{R})$ tal que $a^t_{ij} = a_{ji}, \ \forall\, i, j$.

Ejemplo 9.4.4. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2, 3, \mathbb{R})$ *entonces* $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in M(3, 2, \mathbb{R})$.

Proposición 9.4.1. *Sean A, B matrices "conforme", $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple*

1) $(A^t)^t = A$.

2) $[\lambda A]^t = \lambda A^t$.

3) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

4) $(AB)^t = B^t A^t$.

5) Si A es invertible entonces $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

Demostración.

3) Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$ entonces $A+B = (c_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ \forall\, i, j$, así, $(A + B)^t = \left(c^t_{ij}\right) \in M(m, n, \mathbb{R})$ donde $c^t_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$, tenemos,
$$(A + B)^t = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^t + B^t.$$

4) Sean $A = (a_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in M(m, r, \mathbb{R})$ entonces $AB = C = (c_{ij}) \in M(n, r, \mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$.

Como
$$c_{ij} \in \begin{cases} i\text{-ésima fila} \\ j\text{-ésima columna} \end{cases}$$
de AB, entonces este elemento también pertenece a
$$\begin{cases} j\text{-ésima fila} \\ i\text{-ésima columna} \end{cases}$$
de $(AB)^t$.

Debemos demostrar que
$$c_{ij} \in \begin{cases} j\text{-ésima fila} \\ i\text{-ésima columna} \end{cases}$$

de B^tA^t.

La j-ésima fila de B^t es la j-ésima columna de B, es decir, $(b_{ij}\ b_{2j}\ \dots\ b_{nj})$ y la i-ésima columna de A^t es la i-ésima fila de A, es decir, $(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$ por lo que el elemento que pertenece a

$$\begin{cases} j\text{-ésima fila} \\ i\text{-ésima columna} \end{cases}$$

de B^tA^t es $b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{nj}a_{in}$, este término es igual a $a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, precisamente c_{ij}.

□

Observación 9.4.3. Se cumple que $(ABC)^t = C^tB^tA^t$, A, B, C matrices conforme.

Para realizar la demostración usamos las propiedades ya vistas, así entonces,

$$(ABC)^t = [(AB)C]^t = C^t(AB)^t = C^t\left(B^tA^t\right) = C^tB^tA^t.$$

9.4.2. Matriz Simétrica y Matriz Antisimétrica

Definición 9.4.5. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, decimos que

a) A es una matriz simétrica si y sólo si $A^t = A$.

b) A es una matriz ansimétrica si y sólo si $A^t = -A$.

Ejemplo 9.4.5. *Si $A \in M(n, \mathbb{R})$, demuestre que*

a) $A + A^t$ *es simétrica.*

b) $A - A^t$ *es antisimétrica.*

Solución. Debemos demostrar que

a) $\left(A + A^t\right)^t = A + A^t$, veámoslo

$$\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A = A + A^t.$$

b) $\left(A - A^t\right)^t = -\left(A - A^t\right)$, veámoslo

$$\left(A - A^t\right)^t = A^t - \left(A^t\right)^t = A^t - A = -\left(A - A^t\right).$$

Ejemplo 9.4.6. *Las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -10 \\ 3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

son simétricas.

Ejemplo 9.4.7. *En la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -3 \\ 5 & 6 & -2 \\ \beta & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

es inmediato concluir que, para que A sea simétrica se debe cumplir que $\alpha = 5$ y $\beta = -3$.

Ejemplo 9.4.8. *Considere la ecuación matricial $\left(A - AB^tX^t\right)^t = XBA^t$ donde $X, A, B \in M(n, \mathbb{R})$ son matrices no singulares*

a) Resuelva la ecuación planteada para X.

b) Si $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

determine X.

Solución.

a)

$$\begin{aligned} \left(A - AB^tX^t\right)^t &= XBA^t \\ A^t - XBA^t &= XBA^t \\ 2XBA^t &= A^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X &= \frac{1}{2}A^t\left(BA^t\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}A^t\left(\left(A^t\right)^{-1}B^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A^t\left(A^t\right)^{-1}\right)B^{-1} \\ &= \frac{1}{2}B^{-1}. \end{aligned}$$

b) Si $n = 2$ y como

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{4 - 9} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

entonces

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 9.4.9. *Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$, A matriz simétrica, demuestre que $B^t AB$ es simétrica.*

Solución. Debemos demostrar que $\left(B^t AB\right)^t = B^t AB$ si $A^t = A$,

$$\left(B^t AB\right)^t = B^t A^t \left(B^t\right)^t = B^t AB.$$

9.5. OPERACIONES ELEMENTALES

Definición 9.5.1. Se llama *operación elemental* a la función $e : M(n, m, \mathbb{R}) \to M(n, m, \mathbb{R})$ tal que $e(A) = B$, definida por las siguientes acciones

i) Intercambiar la i-ésima fila con la j-ésima fila de A (columnas); denotamos, respectivamente f_{ij}, (c_{ij}).

ii) Multiplicar la i-ésima fila (columna) de A por una constante $k \neq 0$; denotamos, respectivamente $f_i(k)$, $(c_i(k))$.

iii) Multiplicar la i-ésima fila de A por una constante $k \neq 0$ y sumar esta a la j-ésima fila de A; denotamos, respectivamente $f_{ji}(k)$, $(c_{ji}(k))$.

Observación 9.5.1. Las operaciones elementales son funciones biyectivas y su función inversa es

$$f_{ij}^{-1} = f_{ij} \quad ; \quad f_i^{-1}(k) = f_i(\frac{1}{k}) \quad ; \quad f_{ji}^{-1}(k) = f_{ji}(-k).$$

Las notaciones para las operaciones elementales columna son análogas.

Definición 9.5.2. Sean $A, B \in M(n, m, \mathbb{R})$. Se dice que A es equivalente con B si B se deduce de A por medio de una cantidad finita de operaciones elementales. Denotamos $A \overset{f}{\sim} B$ ó $A \overset{c}{\sim} B$.

Observación 9.5.2. La relación $\sim$ definida en $M(n, m, \mathbb{R})$ es una relación de equivalencia.

Definición 9.5.3. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{R})$, decimos que la matriz A está *escalonada* por filas si

i) Las primeras k filas de A son no nulas, $k \leq n$.

ii) Para cada k-ésima fila, el primer elemento no nulo es un 1.

iii) Si los 1 de las primeras k filas no nulas están en las columnas $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_m}$ entonces $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$.

Si además, cada elemento de la columna c_{k_n} es un cero excepto el 1 de la fila correspondiente entonces decimos que la matriz escalonada está *reducida*.

Ejemplo 9.5.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

está escalonada (tiene dos escalones) pero no está reducida.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

está escalonada y reducida.

Observación 9.5.3. Toda matriz no nula es equivalente fila con una matriz escalonada y reducida por filas.

Debemos seguir un método que nos conduzca con éxito en esta tarea.

Primero debemos encontrar la primera columna no nula y allí, por intermedio de operaciones elementales conseguir un 1 en la primera fila, a continuación y, tomando como pivote este 1 debemos producir ceros bajo este 1.

Enseguida repetimos el proceso para la submatriz que se obtiene fijando la primera fila y esta primera columna (y las eventuales anteriores) no nula; con este procedimiento hemos escalonada la matriz.

Para reducir la matriz procedemos desde el último 1 produciendo ceros sobre él.

Este algoritmo es la demostración (simplificada) de la Observación 9.5.3.

Ejemplo 9.5.2. *Determine la matriz equivalente, escalonada y reducida por filas de*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{21}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{31}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{f_{2}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \overset{f_{32}(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{f_{3}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz ya está escalonada, ahora debemos reducirla, para ello debemos "pivotear" con el 1 que está en la tercera fila para producir ceros sobre él. Si multiplicamos la tercera fila por -2 y después por -3 conseguimos los ceros deseados, después debemos producir ceros sobre el 1 de la segunda fila; denotaremos más directamente como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{f_{13}(-3)}{\overset{f_{23}(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En realidad es fácil.

9.6. MATRIZ INVERSA POR OPERACIONES ELEMENTALES

Definición 9.6.1. Se llama *matriz elemental* a toda matriz que se deduce de Id_n por intermedio de una operación elemental.

Ejemplo 9.6.1.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es matriz elemental ya que

$$Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{21}(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = E_1.$$

Proposición 9.6.1. *Sea $A \in M(n, m, \mathbb{R})$ y B deducida de A al efectuar una operación elemental fila e, entonces, $B = EA$, donde E es la matriz elemental deducida de Id_n al efectuar la misma operación elemental fila e.*

Por otro lado, $B = AE$ donde E es la matriz elemental deducida de Id_m al efectuar la misma operación elemental columna e.

Ejemplo 9.6.2. *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in M(2, 3, \mathbb{R})$. *Como*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \overset{f_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = B,$$

entonces

$$B = EA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

donde E se obtiene a partir de Id_2 como sigue:

$$Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{f_{12}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2, 3, \mathbb{R})$. *Como*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{c_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = B$$

entonces

$$B = AE = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde E se obtiene a partir de Id_3 como sigue,

$$Id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{c_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Notación.

$B = e(A) = EA$ *cuando la operación elemental es operación elemental fila.*

$B = e(A) = AE$ *cuando la operación elemental es operación elemental columna.*

Proposición 9.6.2. *Las inversas de matrices elementales son matrices elementales.*

Demostración. Sea e una operación elemental tal que E es su correspondiente matriz elemental, sea e' la operación elemental inversa de e y E' su correspondiente matriz elemental, debemos demostrar que $EE' = E'E = Id_n$ (por filas)

$$Id_n = Id(Id_n) = (e \circ e')(Id_n) = e(e'(Id_n)) = e(E'Id_n) = e(E') = EE',$$

$$Id_n = Id(Id_n) = (e' \circ e)(Id_n) = e'(e(Id_n)) = e'(EId_n) = e'(E) = E'E.$$

así entonces, $EE' = E'E = Id_n$.

Note que Id es la función identidad y Id_n es la matriz identidad. □

Observación 9.6.1. Se puede demostrar que,

1) Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ entonces, $A \sim B \Leftrightarrow B = E_k\ E_{k-1}\ \ldots\ E_1\ A$ (por filas).

2) Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ entonces, $A \sim B \Leftrightarrow B = A\ E_1\ E_2\ \ldots\ E_k$ (por columnas).

3) Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ entonces, A es no singular $\Leftrightarrow A \overset{f}{\sim} Id_n$.

Demostración.

1) $\Rightarrow$) Si $A \sim B$ entonces existe una cantidad finita de operaciones elementales para transformar A en B, luego $A_1 = E_1A,\ A_2 = E_2A_1 = E_2E_1A,\ A_3 = E_3A_2 = E_3E_2E_1A$ así sucesivamente hasta conseguir $B = A_k = E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1A$.

   $\Leftarrow$) Si $B = A_k = E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1A$ entonces existen k operaciones elementales para transformar A en B, luego, $A \sim B$.

2) Se demuestra de manera análoga.

3) $\Leftarrow$) Si $A \overset{f}{\sim} Id_n$ entonces $Id_n = E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A$, despejando la matriz A obtenemos $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} Id_n$ y A es invertible por ser producto de matrices invertibles.

$\Rightarrow$) Si A es invertible debemos demostrar que $A \overset{f}{\sim} Id_n$. Sea $A \overset{f}{\sim} B$ con B una matriz escalonada y reducida por filas, entonces $B = Id_n$ ya que si no es así, B tendría al menos una fila nula, lo que indicaría que A no es invertible.

□

Estamos ahora en condiciones de presentar un Algoritmo que nos permite encontrar la inversa de una matriz, usando operaciones elementales.

Algoritmo.

Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $(A \,|Id_n) \overset{f}{\sim} (Id_n \,|P)$, entonces $P = A^{-1}$.
En efecto

$$(A \,|Id_n) \overset{f}{\sim} (E_n E_{n-1} \dots E_1 A \,|E_n E_{n-1} \dots E_1 Id_n) = \left(Id_n \,\middle|A^{-1}\right).$$

Ejemplo 9.6.3. *Calcule A^{-1} si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$(A|Id_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_{31}(-4)}{\overset{f_{21}(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_2(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_{32}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_{13}(2)}{\overset{f_{23}(1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{f_3(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Así entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.7. EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 9.1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A, B, C \in M(3, \mathbb{R}).$$

Determine

a) $A + B - C$

b) $A \cdot B$

c) $\frac{1}{2} A - \frac{3}{4} C$

d) $(A \cdot B)^t$

e) $A^2 + A \cdot B - B^2$

f) $(A + B)^t \cdot C$

Ejercicio 9.2. Sean

$$A = (a_{ij})_{10 \times 15}, \ \text{ tal que } \ a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i < j \\ -1 & \text{si } \ i = j \\ i & \text{si } \ i > j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{15 \times 12}, \ \text{ tal que } \ b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \geq j + 2 \\ i & \text{si } \ i < j + 2 \end{cases}$$

$$C = (c_{ij})_{10 \times 15}, \ \text{ tal que } \ c_{ij} = \begin{cases} 5 & \text{si } \ i \neq j \\ 7 + j & \text{si } \ i = j \end{cases}$$

Calcule

a) $s_{5,9}$ en $A + C = (s_{ij})$.

b) $t_{4,10}$ en $AB = (t_{ij})$.

c) $r_{4,3}$ en $(A + C)^t = (r_{ij})$.

Ejercicio 9.3. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$, definimos la traza de A, denotada $tr(A)$ como $tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Demuestre que:

a) $tr(kA) = ktr(A)$, $\forall \, k \in \mathbb{R}$, $\forall \, A \in M(n, \mathbb{R})$.

b) $tr\left(A^t\right) = tr(A)$, $\forall \, A \in M(n, \mathbb{R})$.

c) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, $\forall \, A, B \in M(n, \mathbb{R})$.

d) $tr(AB) = tr(BA)$, $\forall \, A, B \in M(n, \mathbb{R})$.

e) $tr\left(AA^t\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

Ejercicio 9.4. ¿Bajo que condiciones las matrices $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ cumplen

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?.

Ejercicio 9.5. Determine $a, b \in \mathbb{R}$, para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} a & 6 \\ -2 & b \end{pmatrix} + 2Id_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resp. $a = -4$, $b = 3$.

Ejercicio 9.6. Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

¿ Existe matriz C tal que $CA = B$?. Justifique.

Resp. $C = \begin{pmatrix} \frac{2-c}{2} & \frac{4-c}{4} & c \\ \frac{-f-8}{2} & \frac{-f}{4} & f \end{pmatrix}$, $c, f \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.7. Sean $A, B \in M(2, \mathbb{R})$ tal que $AB = Id_2$. Demuestre que también $BA = Id_2$.

Ejercicio 9.8. Hallar todas las matrices que conmutan con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resp. $B = \left\{ \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} / d, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejercicio 9.9. Sean $A, B \in M(2, \mathbb{R})$. Si cada una de ellas conmuta con la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, demuestre que conmutan entre si.

Ejercicio 9.10. Si $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $A = B + C$, $C^2 = 0$, B y C conmutan, demuestre que:

$$A^{n+1} = B^n \left[B + (n+1)C\right].$$

Ejercicio 9.11. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2, \mathbb{R})$. Declarando los supuestos necesarios determine A^{-1} y aplique esto último para determinar A^{-1} (si existe) cuando:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resp. $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}$ si $ad - bc \neq 0$.

Ejercicio 9.12. Sean $A \in M(2,1,\mathbb{R})$, $B \in M(1,2,\mathbb{R})$. Demuestre que AB no es invertible.

Ejercicio 9.13. Resuelva los siguientes sistemas para las matrices X e Y.

$$a) \begin{cases} X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad b) \begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Resp.

a) $X = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 9.14. Sean $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ tal que $AB = kB, \in \mathbb{R}$. Demuestre que $A^nB = k^nB$, $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.15. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál(es) de las matrices dadas es(son) soluciones de la ecuación $X^2 - 5X + 4Id_2 = 0$?.

Ejercicio 9.16. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, determine todas las matrices B tal que $BA = Id_2$.

Resp. $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2-8c & 1+3c & c \\ \frac{3}{2} - 8f & -\frac{1}{2} + 3f & f \end{pmatrix} / c, f \in \mathbb{R} \right\}$.

Ejercicio 9.17. Sean $A, B, X \in M(n,\mathbb{R})$, B una matriz no-singular, determine X si $B^tX^t = (A - XB)^t$. Si $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

determine X.

Resp. $X = \frac{1}{2}AB^{-1}$.

Ejercicio 9.18. Sea $E \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $E^tE = Id_n$. Demuestre que si $AB = BA$ entonces $XY = YX$, donde $X = EAE^t$, EBE^t.

Ejercicio 9.19. Demuestre que

a) $(A^t)^t = A$.

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

c) $(AB)^t = B^tA^t$.

d) $(kA)^t = kA^t$.

e) $(ABC)^t = B^tC^tA^t$, donde A, B, C son matrices "conformes", $k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.20. Sean A, B matrices cuadradas. Demuestre que A^n y B^m, $n, m \in \mathbb{N}$ conmutan si A, B conmutan.

Ejercicio 9.21. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre una formula para $A^n, n \in \mathbb{N}$. Demuestre la formula por inducción y calcule $20A^{12}$.

Resp. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.22. Determine una formula para $A^n, n \in \mathbb{N}$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Resp. $A^n = \begin{cases} A & \text{si } n = 4k - 3 \\ -Id_n & \text{si } n = 4k - 2 \\ -A & \text{si } n = 4k - 3 \\ Id_n & \text{si } n = 4k \end{cases}$

Ejercicio 9.23. Sea M $= \{A \in M(2, \mathbb{R})/A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$.

a) Demuestre que $(M, \cdot)$ es un grupo conmutativo.

b) Determine A^p, $p \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.24. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$.

a) Determine una formula para A^n, $n \in \mathbb{N}$, demuestre la formula por inducción.

b) Calcule $\sum\limits_{i=1}^{n} A^i$.

Resp. a) $A^n = 3^{n-1}A$. b) $\frac{3^n-1}{2}A$.

Ejercicio 9.25. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$.

a) Determine una formula para A^n, $n \in \mathbb{N}$, demuestre la formula por inducción.

b) Calcule $\sum\limits_{i=1}^{n} A^i$.

Resp. a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$. b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A^i = \begin{pmatrix} n & 0 \\ -\frac{n(n+1)}{2} & n \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.26. Determine $X \in M(2, \mathbb{R})$ tal que

a) $X^2 = Id_2$.

b) $X^2 = X$.

c) $AX = B$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.27. Sea $B = (b_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

a) Determine B^2.

b) Si $a = kId_n + tB$, determine k, t para que $A^2 = Id_n$. Verifique.

Ejercicio 9.28. Considere el sistema matricial

$$\begin{cases} (XA)^t + B^tY^t = A^t + (2YB)^t - A^tX^t \\ XA + YB = 2(XA + B) \end{cases}$$

a) Resuelva para $X, Y \in M(n, \mathbb{R})$ en el sistema, dando condiciones a A, B.

b) Además, evalúe X e Y si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.29. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$, decimos que

i) A es *nilpotente* de orden p si y sólo si $A^p = 0$, donde p es el mayor entero positivo para el cual $A^p = 0$.

ii) A es *idempotente* si y sólo si $A^2 = A$.

a) De 3 ejemplos de cada tipo de matriz.

b) ¿Es $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ nilpotente de orden 3?.

c) Si A es idempotente demuestre que

   i) $B = Id_n - A$ es idempotente.
   ii) $AB = BA$.

d) Si A es nilpotente de orden 2, demuestre que $A(Id_n \pm A)^n = A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9.30. La matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$ se dice *involutiva* si y sólo si $A^2 = Id_n$.

a) De 3 ejemplos de una matriz involutiva.

b) Si A es involutiva, demuestre que

   i) $\frac{1}{2}(Id_n + A)$ y $\frac{1}{2}(Id_n - A)$ son idempotentes.
   ii) $\frac{1}{2}(Id_n + A) \cdot \frac{1}{2}(Id_n - A) = 0$.

Ejercicio 9.31. La matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$ se dice simétrica si y sólo si $A^t = A$.
La matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$ se dice antisimétrica si y sólo si $A^t = -A$.
Demuestre que

a) A^2 es simétrica si A es simétrica.

b) AA^t es simétrica.

c) B^tAB es simétrica si A es simétrica, $B \in M(n, \mathbb{R})$.

d) Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es antisimétrica, $B \in M(n, \mathbb{R})$ entonces A^tBA es antisimétrica.

e) Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es simétrica, entonces $A^2, A^4, A^6, \ldots$ son simétricas.

f) Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ es antisimétrica entonces $A^3, A^5, A^7, \ldots$ son matrices antisimétricas y $A^2, A^4, A^6, \ldots$ matrices simétricas.

Ejercicio 9.32. Calcule $x, y \in \mathbb{R}$ para que la matriz

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ y & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ sea simétrica} \qquad ii)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 1 \\ x^2 & 0 & -4x \\ y+1 & x & 0 \end{pmatrix} \text{ sea antisimétrica.}$$

Resp. i) $x = 1,\ y = 2$. ii) $x = 0,\ y = -2$.

Ejercicio 9.33. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$. Escriba la matriz A como la suma de una matriz simétrica con una matriz antisimétrica. Aplique lo anterior a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Resp. $A = \dfrac{1}{2}(A + A^t) + \dfrac{1}{2}(A - A^t)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.34. Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ matrices simétricas. Demuestre

a) $A + B$ es simétrica.

b) AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

Ejercicio 9.35. Si $B = (b_{ij}) \in M(n, 1, \mathbb{R})$ tal que $b_{ij} = 1$, $\forall\, i, j$ y $A = Id_n - \frac{1}{n}BB^t$, $n \in \mathbb{N}$,

a) Demuestre que A es simétrica.

b) Demuestre que A es idempotente.

Ejercicio 9.36. Sean A y B matrices tal que $AB = A$, $BA = B$. Demuestre que,

a) $B^tA^t = A^tB^t$.

b) A^t es idempotente.

Ejercicio 9.37. Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ invertibles tal que conmutan entre si, demuestre que A^{-1} y B^{-1} también conmutan entre si.

Ejercicio 9.38. Sea $A \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $A^2 + A + Id_n = 0$. Determine A^{-1}.

Resp. $A^{-1} = -A - Id_n$.

Ejercicio 9.39. Si $A \in M(n, \mathbb{R})$ tal que $A^m = 0$, para algún m natural, compruebe que la matriz inversa de la matriz $Id_n - A$ es $Id_n + A^2 + A^3 + \cdots + A^{m-1}$.

Ejercicio 9.40. Sean $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ no-singulares. Demuestre que el producto es no-singular y que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ejercicio 9.41. Sea $A = (a_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{C})$, se llama matriz conjugada de A, denotada $\overline{A}$, a la matriz $B = (b_{ij}) \in M(n, m, \mathbb{C})$ tal que $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Demuestre que

a) $\overline{\overline{A}} = A$, $\forall\, A \in M(n,m,\mathbb{C})$.

b) $\overline{kA} = k\overline{A}$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, A \in M(n,m,\mathbb{C})$.

c) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, $\forall\, A, B \in M(n,m,\mathbb{C})$.

d) $\overline{A \cdot B} = \overline{B} \cdot \overline{A}$, $\forall\, A, B$ matrices "conforme" complejas.

Ejercicio 9.42. Considere la matriz cuadrada compleja $A \in M(n,\mathbb{C})$. A se llama matriz hermitiana si $\overline{A}^t = A$, es decir, $A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{C})$ es hermitiana si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Verifique que las siguientes matrices son hermitianas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & i & 1-2i \\ -i & \sqrt{3} & 6 \\ 1+2i & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.43. Si $\overline{A}^t$ se denota por A^* verifique que $(AB)^* = B^*A^*$ si

$$A = \begin{pmatrix} 2-3i & 4+2i \\ 3i & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2+i \\ 3-2i & 4+2i \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.44. Sean $A, B \in M(n,\mathbb{C})$ dos matrices hermitianas, demuestre que $A+B$ también es hermitiana y $(A+B)^* = A^* + B^*$.

Ejercicio 9.45. Si $AB = -BA$ entonces decimos que las matrices A y B son anticonmutativas. Demuestre que cada matriz

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad i^2 = -1$$

es anticonmutativa con las otras matrices (matrices del Spin de Pauli).

Ejercicio 9.46. Sean $A, B \in M(n,\mathbb{R})$, la matriz $AB - BA$ se llama "conmutador" de A y B. Usando el ejercicio anterior compruebe que los conmutadores de $\sigma_x \wedge \sigma_y$, $\sigma_y \wedge \sigma_z$, $\sigma_z \wedge \sigma_x$ son, respectivamente, $2i\sigma_z$, $2i\sigma_x$, $2i\sigma_y$.

Ejercicio 9.47. Calcule A^{-1} si $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 4-61 & 2+3i \end{pmatrix}$.

Resp. $A^{-1} = \dfrac{1}{-13-3i} \begin{pmatrix} 2+3i & -2i \\ -4+6i & 1+i \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.48. Si $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$ es una matriz cuyos elementos son funciones diferenciables en un dominio común entonces $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Si $A(t) = (a_{ij}(t))_{m\times n}$ es una matriz cuyos elementos son funciones continuas en un dominio común que contiene a t y t_0, entonces $\int_{t_0}^{t} A(s)ds = \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)ds\right)_{m\times n}$.

Usando lo anterior, si

$$A(t) = \begin{pmatrix} sen2t \\ e^{3t} \\ 8t-1 \end{pmatrix},$$

determine $\frac{dA}{dt}$, $\int_0^t A(s)ds$.

Ejercicio 9.49. En el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ considere la función

$$f(x) = pe^{ax}\cos(bx) + qe^{ax}\operatorname{sen}(bx) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

a) Verifique que $\dfrac{df}{dx} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

b) Verifique que $\displaystyle\int f(x)dx = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + C^{te}$.

c) Usando a) calcule $\frac{d}{dx}(e^{2x}\cos(3x))$.

d) Usando b) calcule $\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx$.

Ejercicio 9.50. Determine la matriz inversa (si existe) para cada una de las siguientes matrices, use operaciones elementales. Verifique.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 10 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & -8 & 11 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ si } \alpha\cdot\varepsilon \neq 0.$$

Resp. $D^{-1} = \dfrac{1}{\alpha^2\varepsilon}\begin{pmatrix} \alpha\varepsilon & \gamma\delta-\beta\varepsilon & -\alpha\beta \\ 0 & \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & -\alpha\delta & \alpha^2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9.51. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{R})$.

a) Exprese A como producto de matrices elementales.

b) Exprese A^{-1} como producto de matrices elementales.

Resp.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9.52. Demuestre que toda matriz $A \in M(n, \mathbb{R})$ se puede factorizar como $A = BC$ donde B es no-singular y C es la matriz escalonada equivalente fila con A.

Aplique lo anterior a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$