UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

CUARTA PRUEBA PARCIAL
MATEMATICA GENERAL

Santiago, 02 de febrero de 2012

1) Sea $T : R^3 \rightarrow R^2$ una transformación tal que $T(1,2,1) = (1,1)$, $T(0,1,2) = (0,1)$, $T(0,0,1) = (0,0)$

a) Determine la transformación lineal que cumple las condiciones

b) Calcule $T(2,2,1)$

2) Sea $T : R_1[x] \rightarrow M(2,R)$ tal que $T(ax+b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ una transformación

a) Demuestre que T es una transformación lineal
b) Encuentre $Ker(T)$
c) Determine $\dim Ker(T)$

3) Resuelva la ecuación diferencial $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$

4) Encuentre la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas de ecuación $x + y^2 = c$, c = parámetro

5) Resuelva la ecuación diferencial $(x - yx^2)dy + (y + y^2x)dx = 0$

Cada pregunta se evalúa con un máximo de 1,2 puntos

Soluciones

1a) Como $B=\{(1,2,1),(0,1,2),(0,0,1)\}$ es base de R^3 y conocemos lo que la transformación le hace a los elementos de esa base, existe una única transformación lineal T con esas características

Queremos $T(x,y,z)$

Si $(x,y,z)\in R^3$ entonces existen únicos $a,b,c\in R$ tal que

$(x,y,z)=a(1,2,1)+b(0,1,2)+c(0,0,1)$ (*), de donde

$T(x,y,z)=aT(1,2,1)+bT(0,1,2)+cT(0,0,1)=a(1,1)+b(0,1)+c(0,0)$

De (*) tenemos: $\begin{cases} x=a \\ y=2a+b \\ z=a+2b+c \end{cases}$, es decir $\begin{cases} a=x \\ b=y-2x \\ c=z-x-2y+4x \end{cases}$ de donde

$T(x,y,z)=x(1,1)+(y-2x)(0,1)+(z+3x-2y)(0,0)$, finalmente

$T(x,y,z)=(x,-x+y)$

1b) $T(2,2,1)=(2,0)$

2a) Sean $p_1(x)=ax+b, p_2(x)=cx+d\in R_1[x],\ a,c\neq 0$, entonces

i) $T(p_1(x)+p_2(x))=T((a+c)x+(b+d))=\begin{pmatrix} a+c+b+d & 0 \\ 0 & a+c+b+d \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c+d & 0 \\ o & c+d \end{pmatrix}=T(p_1(x))+T(p_2(x))$$

ii) $T(kp_1(x))=T(k(ax+b))=T(kax+kb)=\begin{pmatrix} ka+kb & 0 \\ 0 & ka+kb \end{pmatrix}$

$$=k\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=kT(p_1(x)),k\in R$$

2b) Sea $p(x)=ax+b\in Ker(T)$ entonces $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de donde $a=-b$, entonces $Ker(T)=\{p(x)=ax-a, a\in R-\{0\}\}$

2c) Claramente $\dim(Ker(T))=1$ ya que $\{x-1\}$es base de $Ker(T)$

3) $(4y+yx^2)dy-(2x+xy^2)dx=0 \Rightarrow y(4+x^2)dy=x(2+y^2)dx$; es una ecuación de variables separables, tenemos: $\dfrac{x}{4+x^2}dx=\dfrac{y}{2+y^2}dx$, al integrar obtenemos

$\dfrac{1}{2}Ln(4+x^2)=\dfrac{1}{2}Ln(2+y^2)+C_1$ es decir, $Ln(4+x^2)=LnC(2+y^2)$, de donde la solución general es $4+x^2=C(2+y^2)$

4) De $x+y^{2}=c$ obtenemos $1+2y\frac{dy}{dx}=0$, es decir, $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{2y}$ que es la ecuación diferencial de la familia de curvas dada, entonces, la ecuación diferencial de la familia ortogonal es $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2y}$

Al resolver esta ultima ecuación obtenemos $x=\frac{1}{2}LnCy$

5) $(x-yx^{2})dy+(y+y^{2}x)dx=0 \Rightarrow xdy-yx^{2}dy+ydx+y^{2}xdx=0$

$$\Rightarrow d(xy)-yx^{2}dy+y^{2}xdx=0$$

$$\Rightarrow \frac{d(xy)}{(xy)^{2}}-\frac{yx^{2}}{(xy)^{2}}dy+\frac{y^{2}x}{(xy)^{2}}dx=0$$

$$\Rightarrow (xy)^{-2}d(xy)-\frac{1}{y}dy+\frac{1}{x}dx=0$$

Al integrar obtenemos $-\frac{1}{xy}-Lny+Lnx=C$