UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DMCC

TERCERA PRUEBA PARCIAL, FILA A
MATEMATICA GENERAL

Santiago, 12 de enero de 2012

1) Considere la ecuación matricial $AXB = C$

a) Determine la matriz X si $A, B, C \in M(n, R); A, B$ invertibles

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ¿Cuál es el valor de de la matriz X?

2) Calcule $x \in R$ si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$, donde $a, b, c \in R^+$

3) Sean $A = \{(x, y, z) / x + 2y + z = 0\}$, $B = \{(x, y, z) / 2x - 3y + 2z = 0\}$ subespacios de R_R^3

a) Encuentre una base para A

b) Determine $A \cap B$

c) Calcule la dimensión del subespacio $A \cap B$

4) Considere el sistema lineal $S : \begin{cases} x + 2y = b + 2 \\ x + y = 3a - b \\ 3x - y = b - a \\ x - 3y = -2b + 1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de $a, b \in R$ para que el sistema S tenga solución

b) Determine el conjunto solución con los valores de a, b encontrados

Cada pregunta se evalúa con un máximo de 1,5 puntos

Solucionarlo A

1 a) $X = A^{-1}CB^{-1}$

1 b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f_{23}(-2)}{\overset{f_{13}(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{f_{12}(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

asi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donde $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \overset{c_{32}(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 \\ x & 0 & c \end{vmatrix} = abc - abx - bcx$ entonces

$abc - abx - bcx = 0$ de donde $x = \dfrac{ac}{a+c}$

3 a) $(x, y, z) \in A \Leftrightarrow (x, y, -x-2y)$

Como $(x, y, -x-2y) = (x,0,-x) + (0, y, -2y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-2)$ entonces un generador de A es $\{(1,0,-1),(0,1,-2)\}$

Dado que este conjunto es linealmente independiente entonces es base de A

3 b) $A \cap B$ es la solución del sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$, tenemos

$C = (A/B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{f_{21}(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{f_2(-\frac{1}{7})}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & 0 \end{array}\right)$

$\overset{f_{12}(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & 0 \end{array}\right)$, de donde $x = \dfrac{1}{7}z; y = -\dfrac{4}{7}z; z \in R$

es decir $A \cap B = \left\{(\dfrac{z}{7}, \dfrac{-4z}{7}, z) / z \in R\right\}$

3 c) Como $(\dfrac{z}{7}, \dfrac{-4z}{7}, z) = z(\dfrac{1}{7}, \dfrac{-4}{7}, 1) \in A \cap B$ entonces $\dim(A \cap B) = 1$

4 a) $C=(A/B)=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & b+2\\ 1 & 1 & 3a-b\\ 3 & -1 & b-a\\ 1 & -3 & -2b+1\end{array}\right) \sim\sim .. \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & b+2\\ 0 & 1 & 2b-3a+2\\ 0 & 0 & 12b-22a+8\\ 0 & 0 & 7b-15a+9\end{array}\right)$

Para que el sistema tenga solución debe ocurrir $\begin{cases}12b-22a=-8\\ 7b-15a=-9\end{cases}$, la solución de este sistema es $b=3; a=2$

La solución del sistema original es $x=1; y=2$